

ECOLE POLYTECHNIQUE
ULM
ENS PARIS SACLAY
LYON
ENS RENNES
ESPCI

CONCOURS D'ADMISSION 2026
Composition de Mathématiques A, Filières MP et MPI

1. COMMENTAIRES GÉNÉRAUX

Le sujet de cette année portait sur l'étude de majorations de normes de polynômes de matrices. Les préliminaires introduisaient ou rappelaient les outils utilisés ensuite : norme subordonnée, matrices unitaires, diagonalisation et conditionnement. La première partie proposait une preuve du principe du maximum pour les polynômes, à partir d'une matrice unitaire construite explicitement. La deuxième partie était consacrée à l'inégalité de Von Neumann, d'abord pour les contractions, puis dans un cadre plus général. La troisième partie introduisait le Hausdorffien d'une matrice et le rayon numérique. La dernière partie abordait enfin quelques résultats liés à la conjecture de Crouzeix. Le sujet était progressif, mais long. Les premières questions permettaient à une grande partie des candidats d'entrer dans le problème, à condition de manipuler correctement les définitions de base. La suite devenait plus technique, en particulier avec l'inégalité de Von Neumann, l'utilisation de l'identité de polarisation pour le rayon numérique, puis les questions finales sur la conjecture de Crouzeix. Il n'était donc pas nécessaire de traiter tout le sujet pour obtenir une très bonne note. En revanche, les questions abordées devaient être rédigées avec précision.

Les indications de l'énoncé étaient souvent utiles, mais elles ne remplaçaient pas les vérifications demandées. Plusieurs copies se sont contentées de phrases trop vagues, du type « par analogie avec la question précédente » ou « d'après ce qui précède », alors qu'il fallait établir une identité ou vérifier une propriété précise. C'était notamment le cas dans les questions où intervenaient des blocs de matrices, des doubles inclusions, ou des passages d'une identité polynomiale à une identité matricielle.

Les notions introduites dans le préambule ont été assez bien utilisées dans les premières questions, en particulier la norme subordonnée et les propriétés élémentaires des matrices unitaires. Les préliminaires ont ainsi été souvent correctement traités. Nous avons toutefois relevé des erreurs surprenantes sur des points élémentaires : oubli du théorème des bornes atteintes, confusion entre disque unité et sphère unité, divisions par des quantités susceptibles d'être nulles, ou encore utilisation d'un théorème sans vérification de ses hypothèses.

La rédaction a parfois été trop rapide. Une double inclusion, une vérification du caractère hermitien, la positivité de valeurs propres ou la justification d'une récurrence ne peuvent pas être remplacées par une simple affirmation. Même lorsque l'idée générale était correcte, l'absence de ces vérifications a souvent empêché d'obtenir tous les points de la question.

La fin du sujet a été beaucoup moins abordée. Certaines questions avancées ont donné lieu à des réponses très partielles, relevant davantage du grappillage que d'un raisonnement complet. Les copies les plus solides sont celles qui ont traité avec soin les questions de difficulté intermédiaire, en indiquant clairement les résultats utilisés et les étapes importantes.

Rappelons enfin l'importance d'une copie lisible, bien structurée et correctement numérotée. Il est préférable de rédiger quelques questions de façon complète plutôt que de parcourir tout le sujet en laissant des arguments essentiels dans l'implicite.

2. EXAMEN DÉTAILLÉ DES QUESTIONS

Préliminaires.

1. Cette première question a donné lieu à un nombre important de réponses incomplètes. Il fallait utiliser le théorème des bornes atteintes sur la sphère unité, puis expliquer correctement le passage à la formule avec le maximum pris sur les vecteurs non nuls. Plusieurs candidats ont confondu le fait que le maximum dans la définition soit atteint avec le fait que le maximum demandé sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ soit atteint. On a aussi relevé des confusions surprenantes entre le disque unité complexe et la sphère unité.
2. Cette question a été correctement résolue par la majorité des candidats. Il fallait obtenir le maximum des modules des coefficients diagonaux. Certains candidats ont supposé inutilement que les valeurs propres étaient ordonnées par ordre croissant de module.
3. La question a été bien traitée dans l'ensemble. Il fallait cependant prendre garde à ne pas diviser par une quantité éventuellement nulle. Une distinction explicite du cas $Bx = 0$ permettait d'éviter cette difficulté.
4. Cette question a été réussie par une grande partie des candidats.
5. La question a été résolue correctement par la majorité des candidats. Il fallait utiliser la diagonalisation de A , la sous-multiplicativité de la norme et l'expression de la norme d'une matrice diagonale. La première inégalité demandait de considérer un vecteur propre unitaire et ne devait pas être omise.

Partie A. Principe du maximum pour les polynômes.

6. Les calculs permettant de montrer que la matrice U est unitaire ont souvent été trop succincts ou mal expliqués. Lorsque les candidats choisissaient de vérifier directement que $U^*U = I$, il fallait contrôler soigneusement les coefficients non triviaux de la matrice.
7. Une grande partie des candidats a compris qu'un raisonnement par récurrence était attendu. Cependant, la rédaction est souvent restée trop superficielle. L'hypothèse de récurrence ne pouvait pas se limiter à l'égalité portant sur le seul coefficient $(1, 1)$ de U^k . Il fallait tenir compte de la structure de la première colonne pour justifier correctement le calcul. Quelques erreurs de notation ont également été observées, notamment des égalités incorrectes faisant intervenir $e_1 e_1^*$.
8. Cette question a été réussie par la majorité des candidats. L'inégalité de droite, obtenue en utilisant le théorème de réduction pour les matrices unitaires, a été généralement bien traitée. L'inégalité de gauche a posé davantage de difficultés : l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz devait être clairement détaillée.
9. De nombreux candidats ont tenté d'utiliser des arguments éloignés de la logique du sujet, alors que la question devait s'appuyer sur la construction et les résultats précédents. Les réponses qui ne faisaient aucun lien avec la question 8 ont rarement abouti à une preuve correcte.
10. Cette question a soulevé les mêmes difficultés que la précédente. Il fallait utiliser le résultat obtenu sur le disque et raisonner proprement sur le point où le

maximum est atteint. Plusieurs copies ont proposé des arguments intuitifs sur le bord de S , sans établir le lien nécessaire avec le principe du maximum démontré dans la partie.

Partie B. Inégalité de Von Neumann.

11. Le cas où A est unitaire a été résolu avec succès par la majorité des candidats. Il suffisait d'utiliser proprement la question 5 et le fait que le conditionnement d'une matrice unitaire vaut 1.

12. Cette question a été abordée par un grand nombre de candidats, mais les démonstrations ont souvent été incomplètes. Le caractère hermitien de $I - A^*A$ et de $I - AA^*$ devait être vérifiée explicitement. La positivité des valeurs propres de ces matrices a trop souvent été admise ou justifiée trop rapidement. Enfin, la partie concernant AA^* a parfois été laissée de côté, ce qui ne permettait pas d'obtenir entièrement le résultat demandé.

13. La méthode des polynômes de Lagrange a été correctement identifiée par de nombreux candidats. Il fallait cependant expliquer pourquoi un même polynôme permettait d'obtenir les deux matrices demandées, en tenant compte des valeurs propres correspondantes.

14. Presque tous les candidats ayant abordé cette question ont proposé une solution correcte. Le calcul reposait essentiellement sur la relation entre $A(A^*A)^m$ et $(AA^*)^m A$, puis sur le passage aux polynômes.

15. Cette question a également été bien réussie. Le produit par blocs permettait de conclure, à condition d'utiliser correctement les identités établies aux questions précédentes.

16. Un petit nombre de candidats seulement a donné une solution complète à cette question difficile. La plupart des réponses se sont limitées à des idées générales, souvent formulées comme une simple analogie avec la partie A. Cela ne suffisait pas : il fallait montrer que les puissances de U_k ont le bloc supérieur gauche attendu, puis en déduire que le bloc supérieur gauche de $p(U_k)$ est égal à $p(A)$.

17. Seule une petite partie des candidats a résolu complètement cette question. Beaucoup ont eu l'idée correcte d'introduire la matrice $A/\|A\|$ et d'appliquer la question précédente, mais la normalisation du polynôme et le passage au disque $D(0, \|A\|)$ n'ont pas toujours été rédigés avec précision.

Partie C. Hausdorffien et rayon numérique.

18. L'écrasante majorité des candidats a résolu cette question. Il suffisait de considérer un vecteur propre unitaire associé à une valeur propre de A .

19. La majorité des candidats a correctement utilisé une double inclusion pour décrire le Hausdorffien d'une matrice diagonale.

20. Cette question a été résolue par la majorité des candidats. Il fallait utiliser le théorème de réduction pour les matrices unitaires et hermitiennes. Le passage essentiel consistait ensuite à manipuler correctement le produit scalaire hermitien et à utiliser le fait qu'une matrice unitaire agit bijectivement sur la sphère unité.

21. De nombreux candidats se sont limités à effectuer le calcul suggéré par l'indication, sans donner une démonstration complète. Il fallait montrer les deux inclusions pour obtenir exactement le disque $D(0, 1/2)$. L'indication permettait d'obtenir une partie du résultat, mais elle suggérait également la façon d'obtenir l'inclusion réciproque.

22. Cette question était immédiate en utilisant la continuité de l'application $x \mapsto \langle Ax \mid x \rangle$ sur la sphère unité, qui est compacte. Plusieurs candidats ont proposé des démonstrations beaucoup plus longues, parfois correctes, mais inutilement compliquées.

23. L'inégalité de droite a été souvent obtenue. En revanche, l'inégalité de gauche, qui nécessitait d'utiliser l'identité de polarisation fournie dans l'énoncé, n'a presque jamais été abordée. Dans la plupart des copies, seul le sens le plus immédiat a été traité, alors que l'autre constituait le point principal de la question.

24. Cette question assez simple a été résolue avec succès par la majorité des candidats. Quelques erreurs ont néanmoins été relevées dans la justification du caractère défini positif : il fallait utiliser la question précédente pour conclure que $r(A) = 0$ entraîne $A = 0$.

25. La question ne présentait pas de grande difficulté. Il fallait néanmoins justifier que $r(A) = r(A^*)$, soit directement à partir de la définition, soit par un calcul analogue à celui de la question 21.

26a. La première identité polynomiale a souvent été obtenue correctement. La seconde a suscité davantage de difficultés ; elle s'obtenait en dérivant une identité précédente.

26b. Très peu de candidats sont arrivés jusqu'à cette question et encore moins ont réussi à la traiter complètement. La question demandait surtout de mener à bien des calculs techniques mais élémentaires, en utilisant soigneusement la seconde identité de la question précédente.

26c. Cette question a été résolue par un nombre très réduit de candidats. Il fallait appliquer la formule précédente à $e^{i\theta}A$, puis exploiter la liberté dans le choix de θ .

26d. Cette dernière étape était une application directe des questions précédentes. Elle a été réussie par une partie des candidats qui étaient parvenus jusque-là. Quelques réponses ont toutefois donné lieu à du grappillage.

Partie D. Conjecture de Crouzeix.

27. La question a été assez bien réussie lorsqu'elle a été traitée. Certaines copies se sont contentées d'indiquer le résultat attendu sans en donner la justification complète.

28. Cette question a également été assez bien réussie par les candidats qui l'ont abordée. Elle reposait sur l'utilisation combinée de la question 23 et du résultat de la question 26.

29. Cette question n'a quasiment jamais été traitée. Le point essentiel était d'exploiter l'hypothèse sur les arguments des coefficients du polynôme au bon point du Hausdorffien.

30a. Cette question a été très peu abordée. Il fallait appliquer le résultat d'Okubo-Ando à la matrice normalisée par son rayon numérique, puis utiliser l'inégalité de Von Neumann.

30b. La dernière question n'a quasiment pas été traitée. Elle supposait de translater le problème au centre du disque considéré, puis d'utiliser le principe du maximum pour passer du disque à son bord.