

CONCOURS D'ADMISSION 2026

Composition de Mathématiques B, Filières MP et MPI

1 Présentation du sujet

Le sujet de l'épreuve de Mathématiques B de l'année 2026 porte sur l'étude spectrale des matrices tridiagonales et la convergence de la distribution empirique des valeurs propres des matrices aléatoires vers la loi du demi-cercle de Wigner. Il comporte une partie préliminaire et quatre autres parties, de difficulté essentiellement croissante, qui sollicitent des notions d'algèbre linéaire, d'analyse et de théorie des probabilités.

L'objectif du problème est d'étudier, dans un premier temps, la limite du spectre d'une matrice déterministe dont la structure est proche de celle rencontrée dans les matrices aléatoires. On montre que, lorsque la dimension tend vers l'infini, la mesure empirique des valeurs propres converge vers une loi de probabilité continue portée par l'intervalle $[-2, 2]$.

Les trois premières parties préparent les outils nécessaires à l'établissement du résultat probabiliste final en quatrième partie, à savoir la convergence en loi de la mesure empirique du spectre d'une matrice aléatoire vers la loi du demi-cercle de Wigner.

La partie préliminaire et la première partie posent les bases préliminaires aux calculs et montrent la convergence en loi d'une valeur propre choisie uniformément au hasard dans le spectre de la matrice T_n ayant uniquement une sur-diagonale et sous-diagonale de 1. Les intégrales de Wallis apparaissent ici.

La seconde partie introduit la notion de mesure empirique spectrale, définie comme une somme de masses de Dirac situées aux valeurs propres d'une matrice. On détermine explicitement le spectre de T_n via l'étude des polynômes de Tchebychev et montre la convergence en loi de la mesure empirique spectrale associée. On voit ensuite comment cette étude permet d'obtenir un résultat similaire pour les matrices tridiagonales générales.

La troisième partie donne une démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass, à savoir la densité des polynômes dans l'espace des fonctions continues sur le segment $[-1, 1]$ pour la norme de la convergence uniforme.

Enfin, la quatrième et dernière partie s'intéresse au théorème de Wigner. Elle introduit une matrice aléatoire et montre la convergence de la mesure empirique spectrale associée via l'étude de la convergence de la suite de ses moments. Cette partie utilise les méthodes et résultats des parties précédentes.

2 Conseils généraux pour les candidats

L'équipe correctrice souligne qu'il est préférable de s'attacher à traiter correctement plusieurs questions consécutives, parmi lesquelles se trouvent des questions plus difficiles, plutôt que d'essayer de survoler toutes les parties et de tenter de « grappiller » des points sur les questions faciles. Le barème est établi de sorte qu'une telle stratégie est finalement peu rentable.

Il est par contre tout à fait autorisé de « sauter » une question que l'on ne serait pas parvenu à résoudre, puis d'en utiliser le résultat dans la suite. Il faut alors veiller à vérifier soigneusement toutes les hypothèses requises pour appliquer un tel résultat.

Le soin apporté à l'écriture et à la présentation est trop souvent insuffisant, et c'est un phénomène qui continue à s'aggraver, alors que nous avons déjà insisté sur ce point dans les rapports précédents. Cela peut parfois poser un réel problème à l'équipe correctrice. Dans les cas où, malgré tous nos efforts, certaines parties du texte restent incompréhensibles, le doute est toujours au désavantage de la candidate ou du candidat.

Nous rappelons que l'usage d'un brouillon est indispensable afin de ne présenter sur sa copie que les étapes essentielles d'un raisonnement ou d'un calcul et de ne pas y faire figurer des arguments faux ou trop incomplets. Nous conseillons d'évacuer le stress et de traiter plusieurs questions au brouillon avant de se lancer dans la rédaction au propre.

Une partie de la note est attribuée pour la clarté des arguments, la rédaction et la présentation. L'équipe de correction a constaté, dans la majorité des copies, des manques de réflexes ou de maîtrise dans la rédaction. Voici quelques exemples :

- Le schéma de la preuve d'une convergence uniforme est presque toujours le même : trouver une majoration indépendante de la variable de la différence entre la fonction et son approximant, puis montrer que cette majoration tend vers 0.
- la notation $\lim_{n \rightarrow \infty}$ est fréquemment utilisée de manière abusive avant d'avoir montré l'existence de la limite. L'usage du vocable "tend vers" permet, la plupart du temps, d'éviter cet écueil.
- Dans le même ordre d'idées, une rédaction du type :

$$\left| \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right| \leq \dots \leq M \arcsin(1)$$

« donc l'intégrale converge » est impropre. En effet, c'est la majoration de l'intégrale de valeur absolue qui permet de montrer la convergence, et pas de la valeur absolue de l'intégrale.

- Les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être vérifiées. Par exemple, un changement de variables dans une intégrale généralisée doit être bijectif, strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$.
- Il est préférable d'éviter les fautes dans les noms des théorèmes. Nous avons ainsi pu lire trop fréquemment « Reimann » au lieu de Riemann, par exemple.

Un signe de maturité mathématique, apprécié par l'équipe correctrice, est le bon dosage entre concision et précision des réponses. On constate, surtout dans les premières questions, une rédaction souvent très lourde et, à la fin des copies, au contraire, des arguments sommaires jetés au petit bonheur la chance.

Ajoutons que même les vérifications triviales, par exemple, la condition de bilinéarité dans la définition d'un produit scalaire, doivent être évoquées rapidement, afin de montrer que les définitions sont bien connues.

3 Remarques générales sur l'épreuve 2026

Nous pouvons constater, avec une certaine satisfaction, le maintien du niveau des résultats de l'épreuve écrite de Mathématiques B par rapport aux années antérieures. Néanmoins, le nombre de candidates et candidats a diminué d'à peu près 200 par rapport à l'année 2025.

Nous tenons, une nouvelle fois, à rappeler aux élèves des classes préparatoires (et aux potentiels candidates et candidats au concours d'admission à l'X) les points suivants.

- Il est nécessaire de présenter sa copie avec soin et d'en faciliter la lecture à l'équipe correctrice en soulignant ou en encadrant les arguments et les résultats principaux.
- Il est nécessaire de faire preuve de précision dans la rédaction afin d'éliminer toute ambiguïté.
- Lorsqu'un des résultats démontrés dans les autres questions du problème est utilisé, il faut le mentionner et le mettre en avant. Il en va de même pour les théorèmes du cours.
- Les concours d'admission à l'X et aux ENS sont les concours les plus difficiles du paysage national (et, certainement, parmi les concours les plus difficiles à l'international).

Un bon nombre de copies sont rédigées de manière convenable et montrent un savoir-faire et des connaissances solides. Il nous semble que le niveau des candidates et candidats qui se retrouvent admissibles au concours est stable.

Enfin, le sujet de l'épreuve de cette année était assez classique et nous ne pensons pas qu'il soit plus difficile que les sujets antérieurs.

4 Examen détaillé des questions

Ce qui suit n'est pas un corrigé de l'épreuve, mais une liste de commentaires de l'équipe de correction sur chaque question. Les statistiques données portent sur le total (sans distinction) des options MP et MPI.

4.1 Préliminaire

Question 1. On note régulièrement des lacunes sur cette question d'application directe du cours.

Taux de réussite - 51 %.

4.2 Première Partie

Question 2. Il s'agissait de sommes de Riemann, mais il fallait soit veiller à expliciter la partition et les points d'interpolation utilisés, soit se ramener au cas standard par continuité uniforme, par exemple. Le théorème sur les sommes de Riemann avec subdivision quelconque (dont le pas tend vers 0) n'a été que rarement utilisé ou bien justifié. Il était pourtant le moyen le plus rapide de répondre à la question.

Taux de réussite - 46 %.

Question 3a. On pouvait justifier la convergence a priori en se ramenant à une intégrale de Riemann ou un arcsin puis opérer le changement de variable. Ou, plus efficacement, arguer du fait, peu utilisé, que le changement de variables préserve la convergence. Par ailleurs, les hypothèses sur le changement de variables sont rarement vérifiées.

Taux de réussite - 72 %.

Question 3b. Il s'agissait de calculs simples. Les candidates et candidats ne doivent pas bâcler ce type de questions, car une erreur peut être pénalisante pour la suite.

Taux de réussite - 89 %.

Question 3c. Calcul standard d'intégrales de Wallis, à un coefficient près. Ce coefficient multiplicatif a régulièrement été oublié.

Taux de réussite - 41 %.

Question 4a. Application de la formule de transfert, puis de la question préliminaire via un changement de variable linéaire.

Taux de réussite - 85 %.

Question 4b. On ne pouvait pas appliquer tel quel la question 2, compte tenu de l'hypothèse de continuité manquante. On pouvait néanmoins justifier que les résultats précédents s'étendaient au cas continu par morceaux. Une solution alternative, et sans doute plus élémentaire, consistait à exprimer la probabilité comme la partie entière d'un arccos.

Taux de réussite - 23 %.

4.3 Deuxième Partie

Question 5a. Calcul des polynômes caractéristiques de degré 2 ou 3.

Taux de réussite - 75 %.

Question 5b. Développer un déterminant.

Taux de réussite - 94 %.

Question 5c. Il fallait noter le décalage d'indice avec la question 1. On s'y ramenait sans calculs compliqués en calculant u_3 et u_4 et en utilisant 5a.

Taux de réussite - 27 %.

Question 5d. L'argument pour passer d'une égalité de fonctions polynomiales en une égalité de polynômes a souvent été oublié.

Taux de réussite - 19 %.

Question 6. Afin d'appliquer 5c, il fallait justifier que $|2 \cos(k\pi/(n+1))| < 2$. Pour conclure que toutes les valeurs propres ont été trouvées, il fallait s'assurer qu'elles étaient deux à deux distinctes.

Taux de réussite - 23 %.

Question 7. Une application de 4a.

Taux de réussite - 81 %.

Question 8a. La clé était la relation $\chi_{T(a,b,c)}(X) = \chi_{T(0,b,c)}(X+a)$. La préservation de la multiplicité par translation n'a été que rarement justifiée.

Taux de réussite - 64 %.

Question 8b. Question difficile car demandant une prise d'initiative. En effet, il fallait ici montrer que les spectres des matrices $T_n(0, b, c)$ et $T_n(0, bc, 1)$ étaient égaux. Pour cela, on pouvait exhiber une matrice diagonale pour conjuguer les deux matrices l'une en l'autre. Une autre solution, sans doute plus simple, était de montrer que les deux suites de polynômes caractéristiques vérifiaient la même relation de récurrence :

$$\chi_{T_n(0,b,c)} = X\chi_{T_{n-1}(0,b,c)} - bc\chi_{T_{n-2}(0,b,c)},$$

et

$$\chi_{T_n(0,bc,1)} = X\chi_{T_{n-1}(0,bc,1)} - bc\chi_{T_{n-2}(0,bc,1)}.$$

À ce titre, une observation faite seulement très exceptionnellement consistait à dire que la seconde formule de récurrence s'obtient à partir de la première en changeant (b, c) et $(bc, 1)$.

Taux de réussite - 10 %.

Question 8c. Une application des deux questions précédentes et de l'homogénéité du polynôme caractéristique : $\chi_{\alpha A}(X) = \alpha^n \chi_A(\frac{X}{\alpha})$.

Taux de réussite - 8 %.

Question 9a. Formule de transfert et sommes de Riemann.

Taux de réussite - 14 %.

Question 9b. Une application de **4b**.

Taux de réussite - 6 %.

4.4 Troisième Partie

Question 10a. Une convergence uniforme. La majoration du supremum pouvait s'obtenir directement ou par une petite étude de fonction, puis la convergence de la borne ainsi obtenue se fait par le développement limité du logarithme.

Cette question, pourtant très classique, a révélé un manque de méthode chez la plupart des candidates et candidats. Une rédaction en quelques lignes était possible et mettait en valeur les arguments clés.

Taux de réussite - 40 %.

Question 10b. Une petite analyse de l'effet d'un changement de variable, affine en l'espèce, sur la norme infinie d'une fonction.

Taux de réussite - 51 %.

Question 11. On montrait ici un résultat fondamental du cours sur l'intégration : toute fonction continue sur un segment peut être approchée uniformément par des fonctions en escalier. Le point clé était le théorème de Heine.

Taux de réussite - 20 %.

Question 12. Sans doute une des questions les plus difficiles du sujet : le théorème d'approximation de Weierstrass. Il convenait notamment, lors de la majoration, de distinguer le cas où la variable x était ou n'était pas à une distance inférieure à η d'un des c_i .

Taux de réussite - 5 %.

4.5 Quatrième Partie

Question 13a. Le théorème spectral permettait de justifier que le spectre était bien réel.

Taux de réussite - 25 %.

Question 13b. On se ramenait aux intégrales $I(f_n)$ calculées dans la question **3b**.

Taux de réussite - 21 %.

Question 13c. Dans le calcul de $\mathbb{E}(\text{Tr}(X_n)^2)$, l'indépendance des $W_{i,i}$ devait être mentionnée.

Taux de réussite - 3 %.

Question 14. Afin d'appliquer l'inégalité de Markov, il fallait noter que la variable était positive. Il fallait également voir que S_n et $\mathbb{E}$ sont croissantes.

Taux de réussite - 8 %.

Question 15. On pouvait majorer la probabilité en utilisant l'inégalité de Markov et une majoration de la fonction $g_{k,B}(x)$.

Taux de réussite - 2 %.

Question 16. On pouvait appliquer l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev et ensuite appliquer l'hypothèse (H_k) .

Taux de réussite - 4 %.

Question 17a. On utilisait la question **14** pour introduire le polynôme P recherché.

Taux de réussite - 0 %.

Question 17b. En développant le polynôme P , on obtenait une majoration permettant d'appliquer les questions **15** et **16**.

Taux de réussite - 2 %.