

CONCOURS D'ADMISSION 2026

Épreuve orale d'Analyse de Documents Scientifiques en Mathématiques – Filière MPI

Le présent rapport a pour objectif de préciser les attentes du jury concernant l'épreuve d'Analyse de Documents Scientifiques en mathématiques et de donner aux futurs candidats quelques indications sur l'esprit de cette épreuve.

Les trois sujets proposés cette année couvraient des domaines variés de la théorie des nombres et de l'analyse, tout en illustrant une même démarche : partir de notions accessibles pour conduire progressivement vers des résultats profonds ayant marqué le développement des mathématiques. Les textes présentaient des démonstrations de difficultés variables et laissaient au candidat une grande liberté dans le choix des développements retenus pour son exposé.

Le **premier** sujet était consacré aux **résidus quadratiques modulo un nombre premier** et conduisait jusqu'à la **loi de réciprocité quadratique de Gauss**, l'un des théorèmes les plus célèbres de la théorie des nombres. Le texte débutait par l'étude de la résolution des équations quadratiques modulo un nombre premier, permettant d'introduire naturellement la notion de résidu quadratique. Le symbole de Legendre était ensuite défini comme un outil permettant de caractériser l'existence des solutions de telles équations. Après l'étude de ses propriétés fondamentales, notamment sa multiplicativité et le critère d'Euler, le document abordait le calcul des symboles de Legendre associés à (-1) et à (2) , avant d'énoncer la loi de réciprocité quadratique. Les démonstrations les plus techniques pouvaient être laissées de côté sans nuire à la compréhension générale du texte. Le jury attendait essentiellement que les candidats comprennent la logique de cette progression et soient capables d'expliquer comment la notion de résidu quadratique conduit naturellement au théorème de Gauss et à ses applications au calcul effectif des solutions d'équations quadratiques modulo un nombre premier.

Le **deuxième** sujet portait sur les **valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers**, sujet situé à l'interface de l'analyse et de la théorie des nombres. Après avoir rappelé la définition de la fonction zêta et son lien historique avec la répartition des nombres premiers, le texte présentait les résultats classiques obtenus par Euler concernant les valeurs aux entiers pairs, exprimées en fonction des nombres de Bernoulli et de puissances de (π) . Il soulignait ensuite le contraste frappant entre cette situation bien comprise et le cas des entiers impairs, pour lesquels très peu de résultats sont aujourd'hui connus. Le théorème d'Apéry établissant l'irrationalité de $(\zeta(3))$ constituait le cœur du document, suivi d'une présentation de la démonstration de Beukers fondée sur des intégrales multiples. Le texte se terminait par une ouverture sur les nombreuses questions encore ouvertes concernant les valeurs $(\zeta(5))$, $(\zeta(7))$ et, plus généralement, la nature arithmétique des valeurs impaires de la fonction zêta. Le jury a particulièrement apprécié les candidats capables de mettre en évidence ce contraste entre les résultats complètement établis pour les valeurs paires et les difficultés qui subsistent pour les valeurs impaires, tout en expliquant

pourquoi ces questions demeurent aujourd'hui un important domaine de recherche.

Le **troisième** sujet était consacré aux **fractions continues** et à leur rôle fondamental dans l'approximation des nombres irrationnels par des nombres rationnels. À partir de l'exemple classique du nombre d'or, le texte introduisait progressivement le développement en fraction continue, montrait son existence et son unicité, puis distinguait le comportement des nombres rationnels et des irrationnels quadratiques. Les réduites d'une fraction continue étaient ensuite étudiées au moyen de relations de récurrence sur leurs numérateurs et dénominateurs, permettant d'établir leur convergence vers le nombre considéré. Le document aboutissait au théorème de Lagrange caractérisant les meilleures approximations rationnelles et montrait en quoi les fractions continues constituent un outil particulièrement efficace pour mesurer la qualité des approximations. Plusieurs ouvertures étaient proposées vers des applications en théorie des nombres, avec les nombres de Fibonacci, mais également en phyllotaxie, en mécanique céleste et dans d'autres domaines où apparaissent naturellement des phénomènes d'approximation. Le jury attendait que les candidats mettent en évidence le lien entre la construction algorithmique des fractions continues, les propriétés remarquables de leurs réduites et leurs applications en approximation diophantienne, plutôt que de s'attarder sur des calculs techniques. Bien que traitant de domaines différents, ces trois sujets présentaient une structure commune. Ils s'appuyaient sur des exemples simples et motivants, introduisaient progressivement des outils nouveaux, puis conduisaient à un résultat majeur de la discipline. Le jury attendait donc avant tout que les candidats identifient cette progression, mettent en évidence les motivations des différentes notions introduites et fassent ressortir le résultat central autour duquel s'organise chaque document.

Malgré la diversité des thèmes abordés, les trois sujets présentaient une structure comparable. Chacun conduisait le lecteur d'exemples simples vers des résultats profonds, en introduisant progressivement les notions nécessaires et en laissant au candidat une réelle liberté dans le choix des développements présentés. Les démonstrations les plus techniques pouvaient être simplement expliquées dans leurs grandes lignes, tandis que l'accent devait être mis sur les idées essentielles, les liens entre les différents résultats et la compréhension de la démarche mathématique générale.

Le jury a particulièrement apprécié les candidats qui ont su construire un exposé personnel et structuré, mettant en évidence le fil conducteur du document plutôt qu'une succession de définitions et de théorèmes. Une introduction présentant le contexte mathématique, un plan clairement annoncé et quelques exemples bien choisis permettent généralement de mieux faire ressortir l'intérêt du sujet. Lorsque le document s'y prête, l'illustration d'un résultat par un calcul simple ou un exemple explicite constitue également un atout.

À l'inverse, certains exposés suivaient trop fidèlement l'ordre du document, sans hiérarchiser les résultats ni distinguer les idées principales des développements techniques. D'autres accordaient une place excessive à des calculs ou à des démonstrations longues, au détriment de la vision d'ensemble. Le jury rappelle qu'il n'est pas attendu de présenter l'intégralité du texte, mais de

proposer une présentation cohérente faisant apparaître les résultats les plus significatifs et leur intérêt mathématique.

Enfin, l'entretien permet d'apprécier la qualité de la compréhension du candidat. Les questions posées portent le plus souvent sur les notions introduites dans le document, les motivations des principaux résultats, leurs conséquences ou leurs liens avec des connaissances classiques du programme. Une bonne maîtrise des définitions, des exemples et des idées principales est généralement plus importante qu'une connaissance détaillée des démonstrations les plus techniques.

Cette épreuve permet ainsi d'évaluer non seulement les connaissances mathématiques des candidats, mais aussi leur capacité à organiser un exposé scientifique, à mettre en valeur les idées essentielles d'un document et à communiquer avec précision et rigueur sur des notions parfois éloignées du programme habituel des classes préparatoires.