Épreuve orale de Physique, Filière PC

Ce rapport a pour vocation de donner quelques conseils aux futurs candidats, d'une part sur le déroulement de l'épreuve et sur la connaissance et la maîtrise du cours qui sont attendues par l'examinateur. Cette année, nous organisons le rapport en commentant quelques exercices proposés en commun par les trois examinateurs.

L'épreuve orale de physique dure 50 minutes. Les examinateurs cherchent à évaluer les connaissances et les capacités de raisonnement en physique des candidats. Les exercices proposés sont (i) soit un énoncé très court, ce qui limite le temps d'exposition en engageant rapidement les élèves dans la réflexion (ii) ou soit une question de cours préliminaire en interaction suivie de questions au format libre, parfois guidées comme en physique quantique. Les deux formats (i) et (ii) montrent des adaptations très rapides des élèves. Cette année, nous avons observé un niveau moyen tout à fait satisfaisant, en particulier des étudiantes. Plus de précisions seront apportées avec la description des exercices qui suivent.

Exercice 1 : Force gravitationnelle d'un anneau et champ magnétique

Cette question générale porte sur la physique classique, gravitation, électromagnétisme.

*L'étape 2 fait la différence entre les étudiant(e)s. L'étape 4 est avancé*e et montre de l'intérêt…

Soit un anneau de rayon R dans le plan xy et de masse par unité de longueur $\lambda = \frac{M}{2\pi R}$. Nous cherchons le potentiel gravitationnel produit par cet anneau en un point $\vec{r}$ qui prend la forme générale

$$V(\vec{r}) = -G \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\phi}{|\vec{r} - \vec{\mathcal{A}}|}.$$

Un point sur l'anneau est décrit par le vecteur

$$\vec{\mathcal{A}} = R\cos\phi \vec{e}_x + R\sin\phi \vec{e}_y = R\vec{e}_r.$$

ϕ est l'angle polaire dans le plan qui décrit un point de l'anneau. Nous étudierons ensuite l'influence d'un champ magnétique dans la direction z.

1) Montrer que sur l'axe de l'anneau dans la direction verticale le potentiel gravitationnel est de la forme

$$V(z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

En déduire la force gravitationnelle.

Nous pouvons faire jouer les symétries et voir que la force est dirigée suivant $-\vec{e}_z$ produit par deux éléments symétriques de l'anneau vis à vis du point de l'axe en ajoutant les deux vecteurs $\vec{e}_{r1}$ et $\vec{e}_{r2}$. En appliquant le théorème de Pythagore, la distance entre ce point et un point de l'anneau est

$$|\vec{r} - \vec{\mathcal{A}}| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

Nous pouvons le vérifier en écrivant en coordonnées polaires (cylindriques)

$$\vec{r} = \vec{r}\vec{e}_r + z\vec{e}_z = z\vec{e}_z$$

Nous avons deux vecteurs orthogonaux et donc

$$|\vec{r} - \vec{\mathcal{A}}| = \sqrt{z^2 + R^2 - 2|\vec{\mathcal{A}}||\vec{r}|\cos\theta} = \sqrt{z^2 + R^2}$$

avec $\theta = \frac{\pi}{2}$ l'angle entre le vecteur $\vec{r}$ ou $z\vec{e}_z$ et le vecteur $\vec{\mathcal{A}}$. Nous vérifions ainsi que

$$V(z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Tous les points de l'anneau donc tous les angles ϕ sont équivalents. La force gravitationnelle dirigée dans la direction de l'anneau est

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{GMz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Pour z petit, nous vérifions la physique de l'oscillateur harmonique.

2) Supposons que l'anneau ait une épaisseur très petite ϵ. Quelle est la forme approchée du potentiel lorsque le point r approche l'anneau i.e. $r \to R \mp \epsilon$ et $z = 0$. En déduire la direction de la force pour un point r proche de l'anneau.

Lorsque nous approchons un point de l'anneau, le potentiel va être dominé par les vecteurs caractérisés par le même angle polaire avec $\phi' \to \phi$

$$\vec{r} = r(\cos\phi' \vec{e}_x + \sin\phi' \vec{e}_y)$$

tel que

$$V(r) \approx -\frac{GM}{2\pi R}\frac{1}{|r-R|}.$$

Le potentiel est de la forme

$$V(r = R-\epsilon) = -\frac{GM}{2\pi R}\frac{1}{R-r}$$

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{GM}{2\pi R}\frac{1}{(R-r)^2}.$$

La force est dirigée vers le cercle. De la même manière,

$$V(r = R+\epsilon) = -\frac{GM}{2\pi R}\frac{1}{r-R}$$

avec une force aussi dirigée vers le cercle si $r > R$

$$F_r = -\frac{GM}{2\pi R}\frac{1}{(R-r)^2}.$$

3) Quelle est la forme du potentiel gravitationnel à r petit pour $z = 0$. En déduire la forme de la force gravitationnelle à r petit et z petit.

Nous rappelons $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + ...$

A r petit, nous avons

$$\vec{r} = r(\cos\phi' \vec{e}_x + \sin\phi' \vec{e}_y)$$

Nous avons ainsi

$$\vec{\mathcal{A}} = R(\cos\phi \vec{e}_x + \sin\phi \vec{e}_y).$$

Pour simplifier, nous pouvons supposer $\phi' = 0$ tel que

$$|\vec{\mathcal{A}} - \vec{r}| = \sqrt{(r - R\cos\phi)^2 + R^2\sin^2\phi} = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos\phi}.$$

$$|\vec{\mathcal{A}} - \vec{r}| = R\sqrt{1 + \frac{r^2 - 2rR\cos\phi}{R^2}}.$$

Le potentiel est ainsi

$$V(\vec{r}) = -G\int_0^{2\pi} \frac{\lambda}{R\sqrt{1+\frac{r^2-2rR\cos\phi}{R^2}}}d\phi$$

Si nous développons la racine carrée

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16} + ...$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$$

$$V(\vec{r}) \approx -G\int_0^{2\pi} \frac{\lambda}{R}(1 + \frac{r}{R}\cos\phi - \frac{r^2}{2R^2} + \frac{3}{2R^2}r^2\cos^2\phi + ...)d\phi$$

Si nous moyennons sur l'angle ϕ

$$V(r) \approx -\frac{GM}{R} - \frac{GMr^2}{4R^3}$$

Nous vérifions ainsi que la force dans la direction $\vec{e}_r$ varie comme

$$F_r = \frac{GMr}{2R}.$$

Pour résumer, à petit r et petit z

$$\vec{F} = \frac{GMr}{2R^3}\vec{e}_r - \frac{MGz}{R^3}\vec{e}_z.$$

4) Nous appliquons un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ dans la direction verticale. Quel est le mouvement d'un électron de charge $q = -e$ préparé à la position $\vec{r} = r_0\vec{e}_r$ (avec $z = 0$ et $r_0 \ll R$) en coordonnées polaires.

La force de Lorentz prend la forme

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}.$$

Le champ magnétique est dirigé suivant l'axe z. En coordonnées cylindriques, sachant que la vitesse a une composante en $\vec{e}_r$ de la question précédente, alors ceci induit une force qui tend à faire tourner la particule

$$\vec{F} = F_\phi\vec{e}_\phi = +ev_rB\vec{e}_\phi.$$

Il est intéressant de résoudre la forme de v_r au cours du temps. L'équation de Newton dans la direction $\vec{e}_r$ est

$$\dot{v}_r = \frac{GMr}{2R^3}.$$

Ceci est aussi équivalent à

$$\ddot{v}_r - \frac{GM}{2R^3}v_r = 0.$$

Nous avons alors la solution

$$v_r = v_0 e^{\frac{GM}{2R^3}t}$$

ou

$$r(t) = r_0 e^{\frac{GM}{2R^3}t}.$$

En dérivant cette équation, nous avons

$$v_0 = r_0 \frac{GM}{2R^3}.$$

Nous pouvez évaluer le temps T pour lequel le rayon de la particule va tendre vers $r \to R$:

$$R = r_0 e^{\frac{GM}{2R^3}T}.$$

L'équation de Newton pour la vitesse v_ϕ est alors

$$\dot{v}_\phi = +ev_r B = \frac{eB}{m} r_0 \frac{GM}{2R^3} e^{\frac{GM}{2R^3}t}$$

Nous pouvons introduire la fréquence cyclotron

$$\omega_c = \frac{eB}{m}.$$

En intégrant l'équation nous obtenons ainsi

$$v_\phi(t) = \omega_c r_0 e^{\frac{GM}{2R^3}t}.$$

Pour le temps $t = T$, nous avons

$$v_\phi(t = T) = \omega_c R.$$

Ceci est en accord avec la vitesse angulaire produit par l'effet du champ magnétique uniquement. La gravitation a poussé la particule vers le cercle fixant ainsi son rayon à $r = R$. Le champ magnétique fait tourner la particule autour du cercle.

Question supplémentaire (facultative) :
En quelle année est découverte la force de Lorentz ? et les équations de Maxwell ?

Exercice 2 : Equations de Maxwell, Ondes entre deux plans circulaires

Nous étudions le champ électromagnétique entre deux plans circulaires et l'équation de d'Alembert. R est le rayon typique d'un plan ; un plan est décrit par les variables polaires (r, ϕ). Les deux plans sont fixés à $z = 0$ et $z = d$.

L'idée est de réfléchir sur la validité des formules vues en cours pour deux plans infinis : E=σ/ε. Lorsque le rayon d'un plan est fixé, quelle est la dépendance en position et temps de la densité de charge surfacique. La difficulté sera de justifier pourquoi les termes impairs sont « zéro ».

1) Justifier la forme du champ électrique en coordonnées cylindriques (r, ϕ, z)

$$\vec{E} = E_0(r) e^{i\omega t} \vec{e}_z = E_z(r, t) \vec{e}_z.$$

Nous supposons que la physique dans les plans est identique pour tous les angles ϕ.

Nous avons $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ ce qui impose que $\vec{E}$ ne dépende pas de la variable z entre les plans. Vu que tous les angles ϕ sont équivalents, le champ électrique ne dépend que de la variable de rayon r et du temps pour satisfaire l'équation de d'Alembert. La direction de propagation de l'onde est dans la direction radiale. Physiquement nous pourrons justifier que le champ ne dépend pas de z si la distance entre les plans est petite i.e. $d \ll R$.

2) L'équation de d'Alembert en coordonnées cylindriques est

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}.$$

Résoudre cette équation avec un Ansatz général de la forme

$$E_0(r) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p.$$

Développer la solution autour de $r = 0$ jusqu'à l'ordre 4.

L'équation de d'Alembert se simplifie comme

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right) = -\frac{\omega^2}{c^2}E.$$

En entrant cet Ansatz dans l'équation, nous obtenons l'équation de récurrence

$$(p' + 2)^2 a_{p'+2} = -\frac{\omega^2}{c^2}a_{p'}.$$

$$\vec{E} = \sum_{p'=0}^{+\infty} a_{p'} r^{p'} e^{i\omega t}\vec{e}_z.$$

Nous avons fait le changement de variables $p' = p - 2$. Les termes avec $p' < 0$ sont égaux à zéro car les solutions ne peuvent être infinies en $r = 0$. Nous pouvons aussi vérifier pouquoi les termes impairs sont égaux à zéro : pour $p = 1$ et $p' = -1$ cette solution divergerait en $r = 0$. Par récurrence les termes impairs sont zéro. Pour les termes pairs : nous pouvons introduire le terme $p' = 0$ comme $a_{p'=0} = \tilde{E}_0$. Nous avons ainsi de l'équation

$$a_{p'=2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{4}a_{p'=0} = -\frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{4}\tilde{E}_0.$$

Nous pouvons aussi développer le terme d'ordre 4,

$$a_{p'=4} = -\frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{16}a_{p'=2} = +\frac{\omega^4}{c^4}\frac{1}{64}\tilde{E}_0.$$

Nous pouvons observer l'alternance de la série pour le champ électrique en fonction de r. A petit rayon, nous obtenons ainsi

$$\vec{E} = \tilde{E}_0\left(1 - \frac{\omega^2}{4c^2}r^2 + \frac{\omega^4}{c^4}\frac{1}{64}r^4 + ...\right)e^{i\omega t}\vec{e}_z.$$

Le champ électrique tend vers $\tilde{E}_0$ au centre des plans.

3) Développer la solution pour le champ magnétique à petit r sachant que

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\phi)\vec{e}_z = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\frac{1}{c^2}.$$

Justifier pourquoi le champ magnétique est le long de $\vec{e}_\phi$. Discuter la forme de la solution en relation avec le théorème de Gauss ; quelle est la forme de la densité de charge surfacique sur un plan.

Ceci est l'équation de Maxwell-Ampère et nous supposons qu'il n'y a pas de courant induits dans le milieu entre les plans. La direction du champ magnétique peut se comprendre : le champ électrique est dirigé suivant l'axe z et l'onde se propage dans la direction radiale avec l'Ansatz proposé. Vu que le champ magnétique est orthogonal (perpendiculaire) à la direction de propagation et à la direction du champ électrique, ceci justifie la réponse. Le champ magnétique satisfait l'équation

$$\frac{\partial}{\partial r}(rB_\phi)\vec{e}_z = i\omega r\frac{1}{c^2}\vec{E}(r,t).$$

Nous avons ainsi

$$rB_\phi = \left(\frac{i\omega r^2}{2c^2} - i\omega\frac{\omega^2 r^4}{16c^4} + i\omega\frac{\omega^4}{c^6}\frac{1}{6\times 64}r^6 + ...\right)\tilde{E}_0 e^{i\omega t}$$

soit

$$B_\phi = \left(\frac{i\omega r}{2c^2} - i\omega\frac{\omega^2 r^3}{16c^4} + i\omega\frac{\omega^4}{c^6}\frac{1}{6\times 64}r^5 + ...\right)\tilde{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Nous pouvons aussi vérifier pour $r \to 0$

$$\frac{\partial B_\phi(r,t)}{\partial t} = -\frac{\omega^2}{2c^2}r\tilde{E}_0 e^{i\omega t} = -\frac{\partial E_z}{\partial r}.$$

Sur un cercle de périmètre $2\pi r$, la circulation du champ magnétique donne ainsi

$$(2\pi r)B_\phi \to \frac{i\omega}{c^2}\pi r^2\tilde{E}_0 e^{i\omega t}.$$

A court temps

$$(2\pi r)B_\phi \to -\frac{\omega^2}{c^2}t\pi r^2\tilde{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Dans l'application du théorème de Gauss vu en classe la direction du champ électrique est bien dirigée d'un plan vers l'autre impliquant une symmétrie dans les charges $+Q$ et $-Q$ des deux plans. Le champ électrique est ainsi supposé zéro à l'extérieur des deux plans. Ces généralités restent vraies dans le cas présent où $E_0 = E_0(r,t)$. Si nous fixons une taille de boîte cylindrique autour de chaque plan, nous trouvons que le champ total (additif) satisfait

$$\tilde{E}_0(r,t) = \frac{\sigma(r,t)}{\epsilon}$$

où σ est la densité de charge positive et ϵ la permittivité du milieu. σ est ainsi une fonction du rayon et du temps. La dépendence en temps peut être réalisée avec un circuit et un potentiel AC.

4) Nous étudions le cas où les deux plans sont dans un circuit électrique tel qu'une charge $+Q(t) = Q_0 \cos(\omega t)$ soit présente sur un plan et $-Q(t)$ sur l'autre plan. Suivant la solution de $E_0(r, t)$ trouvée plus haut est-il possible de fixer le rayon R pour obtenir une approximation de champ uniforme ?

En $r = 0$ le champ électrique est $\tilde{E}_0 e^{i\omega t}\vec{e}_z$ ce qui est la réponse uniforme attendue pour la situation vue en classe. Si nous développons le champ électrique pour le rayon $r = R$ et fixons que $\tilde{E}_0(r = R) = \tilde{E}_o e^{i\omega t}$ alors nous obtenons avec l'approximation à l'ordre 4

$$R\frac{\omega}{c} = R\frac{2\pi}{\lambda} = 4.$$

Exercice 3 : Thermodynamique générale et Théorie de la chaleur

Soient deux corps solides avec une grande capacité thermique C. Leur température est T_1 et T_2. Ces deux réservoirs sont distants d'une longueur L et reliés via une tige de capacité thermique zéro.

1) Ecrire l'équation de la chaleur dans la tige et bien discuter les conditions de bords.
L'équation de la chaleur (Joseph Fourier, 1822) est

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T = \frac{\lambda}{\rho C_p}\nabla^2 T.$$

La capacité thermique est zéro tel que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0.$$

Nous avons ainsi

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1.$$

2) Décrire la puissance thermique à travers la tige et implémenter les relations énergétiques avec les réservoirs. La section dans la tige est A.
La variation de flux de chaleur par unité d'aire dans la tige est

$$\lambda\frac{dT}{dx}A = \lambda\frac{T_2 - T_1}{L}A.$$

La variation d'énergie dans les réservoirs est

$$C\frac{dT_1}{dt} = -C\frac{dT_2}{dt}.$$

Nous supposons $T_2 > T_1$ au temps t=0.

3) En déduire la température à grand temps dans les réservoirs et dans la tige.

Nous avons 2 équations couplées

$$\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} A = C \frac{dT_1}{dt}$$

$$\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} A = -C \frac{dT_2}{dt}.$$

Nous pouvons ajouter ces deux équations

$$2\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} A = C \frac{d(T_1 - T_2)}{dt}.$$

En introduisant $\tilde{T} = T_2 - T_1$

$$\frac{d\tilde{T}}{\tilde{T}} = -\frac{2\lambda A}{CL} dt.$$

$$\tilde{T} = \tilde{T}(0) e^{-\frac{2\lambda A}{CL}}.$$

A grand temps, $\tilde{T} = 0$, nous atteignons l'équilibre $T_1 = T_2$. Dans la tige $T(x) = T_1 = T_2$.
Pour obtenir la température d'équilibre, nous pouvons invoquer un bilan énergétique. L'énergie interne est $U = CT$ dans chaque réservoir. A $t = 0$, la somme des énergies est $U = C(T_1^{(0)} + T_2^{(0)})$ et à temps long $t \to +\infty$ $U = 2CT_f$. Dans la tige il n'y a pas de chaleur dissipée car $C_{tige} = 0$ et la conduction thermique est parfaite via λ. Le bilan énergétique nous dit que

$$(T_1^{(0)} + T_2^{(0)}) = 2T_f.$$

Ceci fait du sens le transport de chaleur est parfait et la tige tend à équilibrer les températures à gauche et à droite. Nous pourrions réfléchir à pourquoi utiliser une tige et non à faire un contact local.

4) Justifier la relation thermodynamique dans les réservoirs $\delta Q = TdS$ ainsi que la forme de la variation de l'énergie interne $dU = TdS - P.dV$. Evaluer ainsi la variation d'entropie dans les réservoirs, ΔS. Peut-on avoir $\Delta S = 0$, $\Delta S < 0$.

$$dU = CdT = TdS$$

$$dS = C\frac{dT}{T}$$

Nous avons l'additivité de l'entropie dans les réservoirs

$$\Delta S = C \int_{T_1^{(0)}}^{T_f} \frac{dT}{T} + C \int_{T_2^{(0)}}^{T_f} \frac{dT}{T} = C \ln \frac{T_f}{T_1^{(0)}} + C \ln \frac{T_f}{T_2^{(0)}}$$

$$\Delta S = C \left(\ln \frac{T_1^{(0)} + T_2^{(0)}}{2T_1^{(0}} + \ln \frac{T_1^{(0)} + T_2^{(0)}}{2T_2^{(0}} \right)$$

Cette entropie est échangée entre les réservoirs.

$$\Delta S = 0 \to (T_1^{(0)} + T_2^{(0)})^2 = 4T_1^{(0)}T_2^{(0)}.$$

Cette équation est satisfaite de manière intuitive si $T_1^{(0)} = T_2^{(0)}$. Cette équation peut aussi être ré-écrite comme

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{T_1^{(0)}}{T_2^{(0)}}} + \sqrt{\frac{T_2^{(0)}}{T_0^{(0)}}}\right) = 1.$$

La fonction $x^{1/2} + x^{-1/2}$ a un minimum pour $x = 1$. Nous voyons ainsi que ΔS ne peut être négative.

Certaines questions additionnelles :
Réfléchir au cas où Cp est différent de zéro

Nous réfléchirons si le temps le permet à la résolution de l'équation de la chaleur à 1D lorsque $C_p \neq 0$.
Montrer que la solution est

$$\frac{C}{(4\pi\kappa t)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}.$$

Dans ce cas

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{x}{2\kappa t} \frac{C}{(4\pi\kappa t)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}.$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{2\kappa t} \frac{C}{(4\pi\kappa t)^{1/2}} - \left(\frac{x}{2\kappa t}\right)^2 \frac{C}{(4\pi\kappa t)^{1/2}}\right) e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}.$$

Nous voyons que la fonction est encore égale à zéro pour $x = 0$ et aussi pour $x^2 = 2\kappa t$. A temps court, l'approximation $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ est justifiée pour une tige de taille petite et les résultats ci-dessus s'appliquent. Lorsque $\kappa \to +\infty$ ceci est similaire à ce que l'approximation se transporte instantanément de $x = 0$ à $x = L$.

Que se passe-t-il si nous ajoutons un réservoir de chaleur avec une température T_3 le long de la tige ? L'idée est de généraliser les équations suivant T_3 initial.

Exercice 4 : Densité de courant en physique classique et quantique

Les questions quantiques ont encore montré des performances très intéressantes !

Nous introduisons l'équation de conservation de la densité de particules dans un système

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

$\vec{j}$ est ici la densité de courant.
Question préliminaire : Justifier la validité de cette équation.
L'idée est d'être simple ici : e.g. prendre un cube, avec un courant dans une facette tel que

$$I = -\frac{\partial Q}{\partial t} = \oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d\tau.$$

La charge (en unité de e) est celle à l'intérieur de la boîte et le flux est le flux sortant $Q = \int \rho d\tau$.

1) Cette équation est aussi applicable dans le cas quantique. Supposons une onde plane décrite par l'équation à 1D

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi.$$

(a) Justifier les différents termes de l'équation. Nous rappelons qu'une fonction d'onde est de la forme $\psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ avec E l'énergie. $\psi(x)$ est la solution stationnaire. Rappeler l'équation d'onde pour cette solution $\psi(x)$.

Le terme de gauche donne ainsi $E\psi(x,t)$. Le terme à droite est le terme cinétique. Nous pouvons rappeler l'opérateur impulsion $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ tel que le terme de droite est une énergie cinétique. Nous voyons que les phases temporelles se simplifient menant à

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\psi(x).$$

Les étudiants ont eu l'idée d'invoquer le principe de de Broglie : $p = \hbar k$ pour retomber sur leurs pattes : $E = p^2/(2m)$.

(b) Sachant que la densité de probabilité est $n = |\psi|^2 = \psi\psi^*$, évaluer $\frac{\partial n}{\partial t}$. Montrer que

$$j = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\frac{\partial}{\partial x}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial x}\psi^*).$$

Dans cette preuve nous naviguons avec $\psi(x,t)$ et ensuite $\psi(x)$ car les phases se simplifient

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi + \psi\frac{\partial}{\partial t}\psi^* = \psi^*\frac{H}{i\hbar}\psi - \psi\frac{H}{i\hbar}\psi^*$$

Avec la forme de H

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\psi^*\frac{\hbar}{2mi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + \psi\frac{\hbar}{2mi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^*.$$

Nous pouvons ensuite intégrer sur x et obtenir le résultat en observant que les termes croisés s'annulent pour obtenir la densité de courant.

2) Soit une fonction d'onde de la forme $\psi = \sqrt{n_0}e^{i\varphi}$ avec la densité moyenne n_0 supposée fixe et $\varphi = \varphi(x)$. Quelle est la forme de la densité de courant. Vérifier que $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$. Quelle est la forme de la vitesse associée $\vec{v}$.

$$j(x) = \frac{\hbar}{m}n_0\varphi'(x).$$

Vu que φ est supposé indépendant du temps, l' équation de la dynamique implique $\varphi''(x) = 0$ soit une phase qui croît linéairement avec la position. Pour être plus précis, l'équation d'onde stationnaire

$$E\psi = \frac{\hbar^2}{2m}(\varphi')^2\psi - \frac{i\hbar}{2m}\varphi''\psi.$$

Le premier terme donne le terme cinétique et le deuxième terme est 0. La vitesse associée, identifiant n_0 avec la densité moyenne de particules

$$j = n_0v = \frac{n_0\hbar}{m}\varphi'(x)$$

3) Justifier que nous pouvons ainsi écrire de manière générale la relation suivante entre vitesse et phase

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m}\vec{\nabla}\varphi,$$

pour un modèle unidimensionnel.

Cette déduction est immédiate avec la forme particulière de l'opérateur Nabla à 1D

$$\vec{\nabla} = \frac{d}{dx}\vec{i}$$

mais utile pour la question d'après.

4) Soit un système unidimensionnel sous forme d'anneau de rayon R. Quelle est alors la forme de $\vec{v}$ et de la phase φ en coordonnées polaires. Vérifier

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \frac{h}{m}.$$

Justifier un protocole expérimental pour l'observation d'une telle vitesse avec une analogie classique du courant.

Nous avons un mouvement unidimensionnel le long de l'anneau et pouvons ainsi appliquer le résultat de 3). En coordonnées polaires, nous avons ainsi

$$\vec{v} = v_\theta e_\theta = \frac{\hbar}{m}\frac{\partial\varphi}{R\partial\vartheta}\vec{e}_\theta.$$

La vitesse étant constante alors ceci implique une relation linéaire entre φ et l'angle polaire ou la distance le long de l'anneau $\varphi = \kappa\theta$

$$v_\theta = \frac{\hbar}{m}\frac{\kappa}{R}.$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{l} = v_\theta R d\vartheta$$

$$\oint v_\theta R d\vartheta = \frac{h}{m} = \frac{\hbar}{m}\int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Nous pouvons invoquer le théorème d'Ampère et voir cet anneau comme une boucle de courant. Nous pourrons alors anticiper la présence d'un champ magnétique en z comme pour une bobine. La vitesse a une singularité en $R = 0$ ce qui suggère que ce flux magnétique est un peu particulier (vortex). Cette approche nést plus valide si $R < R_{vortex}$.

L'étape 4 est la question la plus difficile. L'étape 1(b) demande aussi du soin mathématique au tableau et de l'initiative, ce qui fait aussi la différence entre les étudiant(e)s.

Exercice 5: Marches Classique et Quantique : Probabilités, électrons et ondes de Fresnel

Beaucoup de phénomènes dans la nature peuvent être décrits par des marches sur une route très étroite (chaine de Markov) avec à chaque pas une probabilité d'aller à gauche et une probabilité d'aller à droite.

1. Soit un marcheur courageux faisant M pas au total. La probabilité d'aller à droite est p à chaque pas et la probabilité d'aller à gauche est $(1-p)$. Dans la limite où $M \to +\infty$ (et $p \ll 1$ pour avoir Mp fixé), la loi de probabilité pour faire n pas vers la droite est une loi de Poisson
$$P(n) = \frac{\nu^n}{n!}e^{-\nu}$$
avec $\nu = Mp$. Quelle est la valeur moyenne du nombre de pas réalisés vers la droite ?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(n)n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\nu^n e^{-n}}{(n-1)!} = \nu e^{-\nu} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\nu^{n-1}}{(n-1)!} = \nu e^{-\nu} \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{\nu^{n'}}{n'!} = \nu = Mp.$$

2. Nous faisons une analogie de la marche *dans le temps* avec un ensemble de charges voyant une marche de potentiel $V(x) = V > 0$ en $x = 0$. Quantiquement, chaque charge (électron) a une probabilité p de passer la marche ou non.
- Que représente M dans ce modèle ?
Le nombre de charges total dans le modèle qui vont passer la barrière.
- Que représente ν pour le système d'électrons.
ν représente ainsi le nombre moyen d'électrons qui passent la barrière.
- Que représente p physiquement en termes du modèle quantique (sans faire de calcul).
La probabilité de passer la barrière p devrait être reliée au coefficient de transmission quantique dans le modèle de marche pour chaque électron. Dans un modèle ou chaque charge est indépendante, il est cohérent de vérifier que le nombre de charges transmises moyen est p.nombre de charges. Nous pouvons aussi assembler le phénomène de chaque passage dans le temps et ceci est similaire à une chaîne de Markov.

3. Vérifier la formule pour la probabilité p dans le modèle de marche quantique en vous appuyant sur la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée à l'interface. Quelle est la relation entre V et l'énergie incidente pour que l'approximation $p \ll 1$ soit correcte. En déduire le courant moyen pour un temps unité passant la barrière de potentiel.

Les équations de continuité à l'interface pour la fonction d'onde et sa dérivée donnent en $x = 0$
$$A + B = C$$
$$A(ik) - B(ik) = C(ik').$$
A gauche de l'interface en $x = 0$, l'énergie est
$$E_{in} = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$$
L'énergie à droite de l'interface est
$$\frac{(\hbar k')^2}{2m} + V.$$

La conservation de l'énergie à l'interface implique donc $k' < k$ si $V > 0$. En jouant avec les deux équations, nous vérifions

$$r = \frac{B}{A} = \frac{k - k'}{k + k'}.$$

Nous obtenons aussi

$$\frac{C}{A} = \frac{2k}{k + k'}.$$

Un coefficient de transmission T et de reflection R doivent vérifier $R + T = 1$. Le coefficient de réflexion est égal à

$$|r|^2 = R = \left(\frac{k - k'}{k + k'}\right)^2.$$

Nous vérifions

$$|r|^2 + \left|\frac{C}{A}\right|^2 \frac{k'}{k} = 1.$$

Vu que l'onde réfléchie et l'onde incidente sont dans le même milieu nous avons $R = |r|^2$ et donc le coefficient de transmission dans le milieu est

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 \frac{k'}{k} = \frac{4kk'}{(k + k')^2}$$

Si les étudiants n'ont pas vu la densité de courant quantique, cette justification leur permet de vérifier le résultat. Le coefficient de transmission peut être ré-ecrit avec l'énergie E_{in} et V.
Donc, nous déduisons $p = T$ dans ce modèle i.e. la probilité de passage. Pour avoir $p \ll 1$ ceci implique que E_{in} soit très proche de V i.e. k' est petit. Le courant moyen pour un temps unité est ainsi $\langle I \rangle = ev = eMT$.

---

4. Etablir une analogie avec les ondes électromagnétiques de Fresnel pour deux milieux de vecteurs d'onde k et k' respectivement en termes de coefficients de réflexion et de transmission. Discuter la relation énergétique à l'interface et comparer avec le cas quantique plus haut.

Nous obtenons les mêmes équations pour R et T pour les ondes de Fresnel électromagnétiques (mêmes dérivations) en termes de k' et k. L' interprétation énergétique est différente pour les particules relativistes avec une relation linéaire.

$$\omega = kc$$

à gauche et

$$\omega = \frac{k'c}{n}$$

La vitesse de l'onde à droite est

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}.$$

Nous obtenons ainsi

$$R = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2$$

$$T = \frac{4n}{(1+n)^2}.$$

Nous supposons comme dans le cas quantique de l'air à gauche de l'interface. Si nous avons un matériau comme du verre à droite alors $R \sim 0.04$. Le verre devrait représenter une barrière de potentiel pour les électrons. Dans le cas relativiste nous obtenons (n=1.5 pour le verre)

$$\frac{k'}{k} = n.$$

Des particules relativistes ont la possibilité de passer à travers la barrière comme un paradoxe de Klein. Les electrons peuvent aussi passer à travers une double barrière.

***

Nous avons mentionné plus haut que nous posons des exercices plus difficiles en seconde intention, lorsqu'un exercice plus proche du cours a été résolu. Les meilleurs oraux supposent d'aborder ce type de question, sans nécessairement les résoudre. Donnons pour illustration quelques questions de ce type :

- Montrer que lorsqu'on observe un arc-en-ciel, l'angle (rayons du soleil vers l'arc en ciel / arc en ciel / rayons provenant de l'arc en ciel vers nous) est toujours d'environ 42^0.
- On réalise un cube avec 6 plaques métalliques, cinq au potentiel nul, une au potentiel V_0. Quel est le potentiel au centre du cube ? (Les arrêtes du cube sont isolantes).
- Une substance de volume V et de masse volumique ρ est malléable. Montrer qu'il existe une forme de cette substance et qu'il existe un point P dans l'espace qui maximise l'amplitude du champ gravitationnel en ce point.
  etc.

Pour conclure, nous avons observé cette année un bon niveau en moyenne avec quelques performances excellentes, témoignant de la bonne préparation des élèves.