

CONCOURS D'ADMISSION 2026
Composition de Mathématiques, Filière PC

1. COMMENTAIRES GÉNÉRAUX

Le sujet de cette année avait pour finalité d'explorer certains modèles mathématiques simplifiés de matériaux ferromagnétiques. L'idée centrale consistait à représenter le matériau comme une collection d'aimants interagissant selon une fonction d'énergie, le système occupant une configuration donnée avec une probabilité proportionnelle à l'exponentielle de cette énergie. L'épreuve comportait une forte dimension analytique et probabiliste, et parfois, en particulier dans la première partie, dans un cadre où on ne supposait pas les fonctions lisses et où les théorèmes usuels sur les limites n'étaient pas forcément applicables tels quels. Les résultats que le sujet faisait démontrer illustraient des phénomènes de transition de phase liés à la température et aux champs magnétiques.

Les questions du sujet étaient de longueurs et de difficultés variables, structurées autour de trois parties. Une des difficultés du sujet était de s'approprier les nombreuses notations introduites au fur et à mesure du sujet. Cependant, les parties n'étaient pas strictement dépendantes, et il était, comme le rappelait l'énoncé, tout à fait acceptable de répondre à une question en admettant les résultats des questions précédentes. Le sujet sollicitait des domaines variés du programme : le calcul différentiel, y compris à plusieurs variables, l'algèbre (bi)linéaire, l'analyse asymptotique (équivalence de Stirling, limites de suites de fonctions), et naturellement, les variables aléatoires sur un espace probabilisé fini.

Globalement, la gestion de l'avancée dans le sujet nécessitait une bonne prise de recul. Quasiment aucune question ne demandait de calculs excessivement techniques, mais nous notons cette année que la rédaction a parfois manqué de précision sur des notions fondamentales. L'étude de la convexité de fonctions ou la justification rigoureuse d'existence des limites ou d'interversion de limites et de dérivées exigeaient une argumentation claire et détaillée. Nous suggérons donc aux candidats de bien relire les questions et les arguments proposés pour ne pas oublier une partie de la question et vérifier que le raisonnement employé et les hypothèses utilisées correspondent bien à celles de l'énoncé. C'était en particulier le cas dans la partie I qui a posé d'assez grandes difficultés cette année et n'a parfois été que très peu traitée.

Globalement, toutes les parties ont été abordées par les candidats, d'autant plus qu'elles faisaient appel à diverses notions du programme. Dans chacune d'entre elles, certaines questions étaient accessibles en admettant les résultats des parties précédentes, mais assimiler les différents résultats obtenus pendant le sujet était assez difficile.

Rappelons comme chaque année quelques recommandations importantes. Nous insistons sur l'importance d'une rédaction rigoureuse et soignée, ainsi que sur une mise en valeur claire de la structure de la copie (numérotation des questions et présentation adéquate des résultats). De plus, un soin minimal et une écriture lisible sont attendus et l'utilisation des questions précédentes nécessite de les mentionner explicitement et précisément pour être valorisée.

Enfin, si la pondération des questions est généralement corrélée à leur difficulté, il est absolument nécessaire de prendre le temps de fournir une rédaction correcte des réponses données, y compris pour les résultats élémentaires, d'autant plus que le sujet de cette année comportait plusieurs questions en dehors du cadre le plus usuel ou simple (par exemple en termes de dérivabilité). La stratégie de survoler le sujet en ne répondant qu'aux questions les plus simples ne peut aboutir à une note correcte.

2. EXAMEN DÉTAILLÉ DES QUESTIONS

Première partie. Cette partie était consacrée à des résultats de convexité utilisés plus tard, de nature plus ou moins élémentaire. Elle a posé des difficultés notamment car elle nécessitait de faire bien attention aux hypothèses, assez minimales le plus souvent, et demandait des justifications précises (sur l'existence et l'échange de limites, convexité à plusieurs variables, etc.).

1. Cette question, traitée dans de nombreuses copies avec des bonheurs divers, était partiellement une question de cours qui devait être traitée en utilisant la notion de convexité rappelée dans l'énoncé. Notamment, la fonction en question n'était supposée dérivable qu'en un seul point (et pas plus). On attendait donc ici la démonstration complète du lemme des pentes. Les passages à la limite ont posé des difficultés dans de nombreuses copies (en ne passant par exemple pas à la limite dans tous les membres d'une inégalité). Les copies ayant utilisé des résultats du cours basés sur le lemme des pentes ont obtenu une partie des points.

2. Question abordée dans la majorité des copies qui s'obtenait par un passage à la limite assez simple à partir de la définition rappelée de la convexité.

3. Il s'agissait de donner un contre-exemple à la question précédente, à savoir de trouver une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (qui soient convexes et dérivables) qui convergeait vers une fonction non partout dérivable. Dans un certain nombre de copies, les justifications de la convexité ou de la convergence étaient absentes. Certaines copies ont remarqué que la question 19 donnait un tel contre-exemple (qui n'était pas le plus simple).

4. Cette question a été beaucoup traitée, mais a aussi posé pas mal de difficultés. Il fallait ici faire attention à une difficulté inhérente au fait qu'on n'était pas placé, a priori, dans une situation permettant d'utiliser des résultats de convergence dominée pour inverser les limites. Il fallait donc, par exemple, justifier l'existence de la limite des $f'_n(x)$. On peut aussi souligner ici le manque de rigueur de certains candidats quand il s'agit de soustraire des encadrements.

5. Une des difficultés majeures de cette question et de la suivante était de se rappeler précisément de la définition d'une matrice symétrique positive et un nombre important de copies ont utilisé des caractérisations erronées de cette propriété. Il y avait une coquille dans l'énoncé qui n'a pas gêné les candidats : il fallait lire $x \in \mathbb{R}^d$.

6. Question peu traitée qui pouvait se faire en établissant le fait que pour montrer que g est convexe, il suffisait de le montrer pour tout u pour la fonction $t \mapsto g(x+tu)$. Puis en reprenant les arguments de la question précédente.

7. Question assez facile, dont le résultat à démontrer était donné. Il fallait donc faire attention aux justifications (notamment pour le caractère C^2 ou les calculs). Le caractère fini de la variable aléatoire qui permettait de justifier les dérivées et

simplifier les calculs a été peu remarqué.

8. Question peu traitée car plus difficile, et qui consistait à appliquer les questions précédentes. Pour justifier du caractère symétrique, on pouvait utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans les calculs d'espérance donnés dans la question 7 en décomposant les termes en produit de deux variables aléatoires.

Deuxième partie. Cette partie introduisait une suite de variables aléatoires indépendantes indicées par un paramètre N et des méthodes de calcul des valeurs asymptotiques (pour N grand) de diverses quantités associées, en particulier l'énergie libre du système. Ces résultats pouvaient servir en partie 3 en les admettant.

9. Question sans difficulté majeure et traitée dans pratiquement toutes les copies.

10. Question peu traitée qui pouvait se faire en appliquant la première partie (question 8) en décomposant H_N comme le produit scalaire de (β, h) avec une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ bien choisie. Ou en refaisant essentiellement l'argument de cette question.

11. Question traitée dans presque toutes les copies et sans difficulté majeure, mais parfois avec imprécision sur la condition pour avoir deux racines distinctes ou sur les calculs.

12. Cette question a également été traitée dans presque toutes les copies et n'a pas présenté de difficultés majeures.

13. Cette question était difficile et n'a été que très rarement traitée jusqu'au bout. Une des difficultés majeures était que les $B_{a_i, a_{i+1}}$ n'étaient pas mutuellement indépendantes. Il convenait de bien exprimer la trace et simultanément l'espérance en fonction des coefficients a_i .

14. Question également abordée dans de très nombreuses copies et qui consistait à exprimer la trace en fonction de la valeur propre la plus grande en module en utilisant soigneusement des résultats d'évaluation d'équivalents ou développements limités. Beaucoup de candidats ont peu ou mal justifié l'inégalité entre les modules des deux valeurs propres.

15. Question sans difficulté à partir de l'expression de la question 12, qui pouvait se faire en utilisant la dérivabilité itérée de fonctions usuelles, mais nécessitait quelques justifications (comme par exemple que le terme sous la racine carrée restait strictement positif).

16. Question relativement peu traitée. Obtenir la formule pour l'expression des m_N pouvait se faire en utilisant la question 7 pour une variable aléatoire bien choisie. Le passage à la limite découlait de la question 4 (dont il fallait vérifier les hypothèses).

17. Question abordée par un certain nombre de copies. Elle pouvait se faire par un argument de développement limité ou de négligeabilité et en justifiant les cas possibles selon le signe de h .

18. Question peu traitée. Sa principale difficulté était de réussir à utiliser différentes questions précédentes (2, 4, 14, 17 notamment).

Troisième partie. La dernière partie étudiait une modélisation de la magnétisation macroscopique du système (via la moyenne des spins donnés par les S_N) en introduisant une certaine fonction (d'entropie) $I(x)$. Elle nécessitait une certaine maîtrise du calcul des probabilités asymptotiques et d'optimisation (recherche d'extrema), et l'étude fine des limites et de la dérivabilité. La question finale mettait en évidence l'existence d'une transition de phase à basse température. Beaucoup de questions de cette partie (y compris la dernière) pouvaient se faire sans utiliser les parties précédentes. Une difficulté était l'introduction de nouvelles fonctions et notations.

19. Cette question sans difficulté a été traitée dans de nombreuses copies.

20. Question traitée dans un assez grand nombre de copies qui pouvait se faire en se ramenant à une loi binomiale. Il convenait également de préciser pour quelles valeurs de x la probabilité était nécessairement nulle.

21. Question très peu traitée, assez délicate et nécessitant d'avoir obtenu la formule correcte à la question précédente. Elle pouvait se faire en utilisant la formule de Stirling à partir de la formule obtenue à la question précédente (en faisant attention qu'on ne peut pas sommer des équivalents) et en justifiant que l'on pouvait passer aux équivalents (autrement dit que les termes que l'on avait dans les factorielles tendaient vers l'infini). L'énoncé de cette question était erroné, il manquait un terme en $-\ln(2)$. Cela n'a cependant pas eu d'impact sur les copies ou les corrections puisque ce terme constant ne jouait aucun rôle par la suite.

22. Question assez peu difficile mais très peu traitée, dont le point clé était que l'espérance (dans l'expression de Y_N) était une somme finie de termes positifs.

23. Question assez simple qui a été abordée dans un nombre conséquent de copies. De nombreuses erreurs de calcul sur les dérivées secondes (des problèmes de signes notamment) ont impacté la réussite à cette question et aux deux suivantes.

24. Question qui nécessitait une étude de fonction et/ou arguments de convexité pour trouver les points critiques de la dérivée. L'argumentation nécessitait d'étudier les cas pour β considérés dans la question précédente. Cette question a été relativement peu traitée.

25. Question très peu traitée et assez difficile car il fallait considérer, comme dans la précédente, plusieurs cas. Les arguments étaient assez similaires à ceux de la question précédente.

26. Question très peu traitée et assez subtile. Elle nécessitait d'utiliser avec soin le caractère maximal de $x_*(\beta, h)$, l'unicité du maximum et un argument de passage à la limite soigneux.

27. Question très peu traitée quoique pas extrêmement difficile. Elle nécessitait là encore de considérer le caractère maximal de $x_*(\beta, h)$ et de comparer explicitement les formules de $\psi_{\beta, h'}$ et $\psi_{\beta, h}$.

28. Cette question a été beaucoup plus traitée que la précédente et utilise essentiellement la continuité de $x_*(\beta, h)$ en h .

29. Question très peu traitée et dont la difficulté était en $h = 0$.

30. Question relativement peu abordée. Sa difficulté principale était de se rappeler des notations du sujet ainsi que certains résultats des questions précédentes.

31. Question peu abordée, mais qui ne nécessitait que très peu de résultats intermédiaires. Essentiellement, il fallait utiliser le fait que le maximum était un point critique de la dérivée de ψ et utiliser un peu de trigonométrie hyperbolique pour conclure.

32. Question très peu traitée qui se déduisait de la précédente par un argument de développement limité, une fois démontré (ou admis) que $x_*(1/2, h)$ tendait vers 0 en $h = 0$.