

Sujet 1: Les géométries chaotiques

Travail demandé

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le texte joint à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du texte et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du texte.

Remarques générales

Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des coquilles typographiques,... qui sauf exception n'ont pas été corrigées.

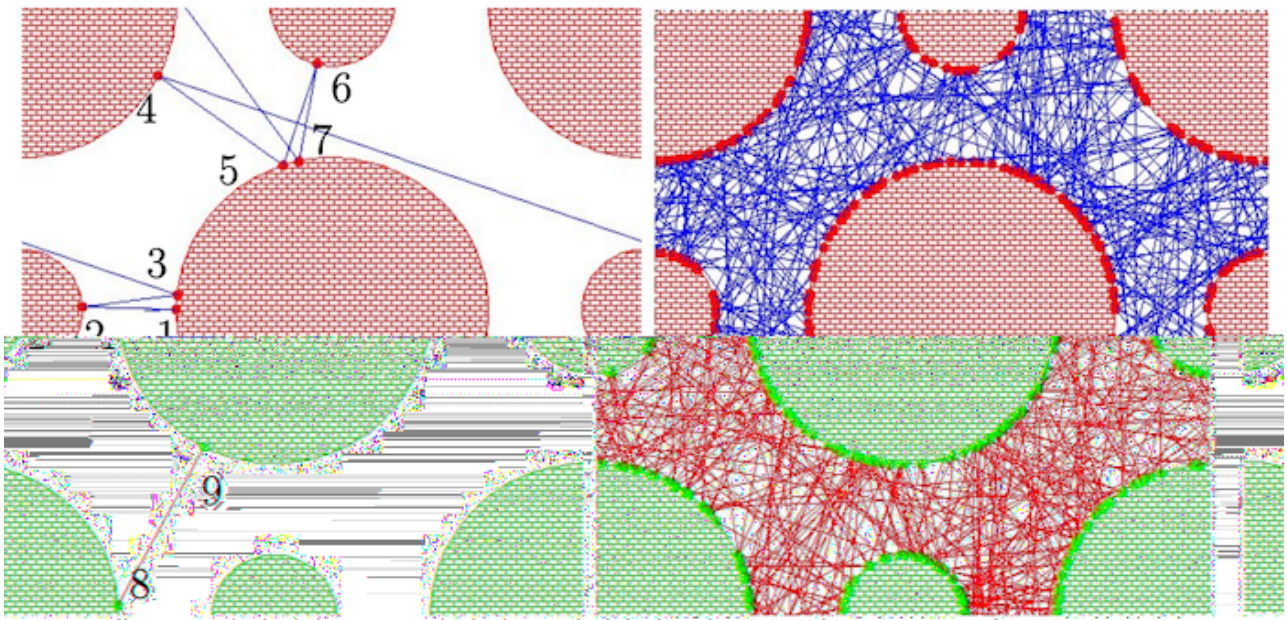
Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.

Vous pouvez annoter les documents qui vous sont fournis. Vos annotations ne seront pas regardées par l'examineur.

LES GÉOMÉTRIES CHAOTIQUES

I. Emergence du chaos dans les géométries à courbure négative

Piste rouge Ecrit par Lefeuvre, Thibault



Qu'est-ce qu'une géométrie chaotique ? Comment la caractériser ? Dans ce premier article, nous illustrons la notion de *courbure* d'une géométrie et expliquons comment celle-ci peut-être naturellement à l'origine de phénomènes chaotiques lorsqu'elle est négative. Il sera également question de vases en porcelaine de Chine, de parties de billards, de Snake, et de bien d'autres choses encore !

Qu'est-ce qu'une géométrie ?

On désignera dans ce texte par *géométrie de dimension deux* une surface munie d'une règle permettant de mesurer la distance entre deux points de la surface. L'un des exemples que nous retiendrons, car il parlera à tout le monde (enfin, espérons-le !), est la Terre sur laquelle on sait naturellement mesurer des distances : ainsi, de Paris à New-York, y a-t-il très précisément 5770 kilomètres selon Google ! En règle générale, sur une telle surface, étant donnés deux points P (Paris) et N (New-York) il existe exactement un seul plus court chemin entre P et N : ce chemin est appelé *géodésique* et c'est à peu près — selon le vent — celui que suivent les avions volant de Paris vers New-York (eh oui, votre pilote fait rarement un crochet par Hawaï !). On peut représenter ce chemin sur une mappemonde ou bien sur le globe terrestre (voir Figure 1 (#figure1)) : il ne s'agit évidemment pas d'un chemin en ligne droite puisque la Terre est une sphère et qu'elle est *courbée*, mais d'un chemin en *arc de cercle* (c'est plus précisément une portion de l'unique cercle centré au

noyau de la Terre et passant par Paris et New-York). Sur la Terre, les géodésiques correspondent donc à des arcs de cercle.

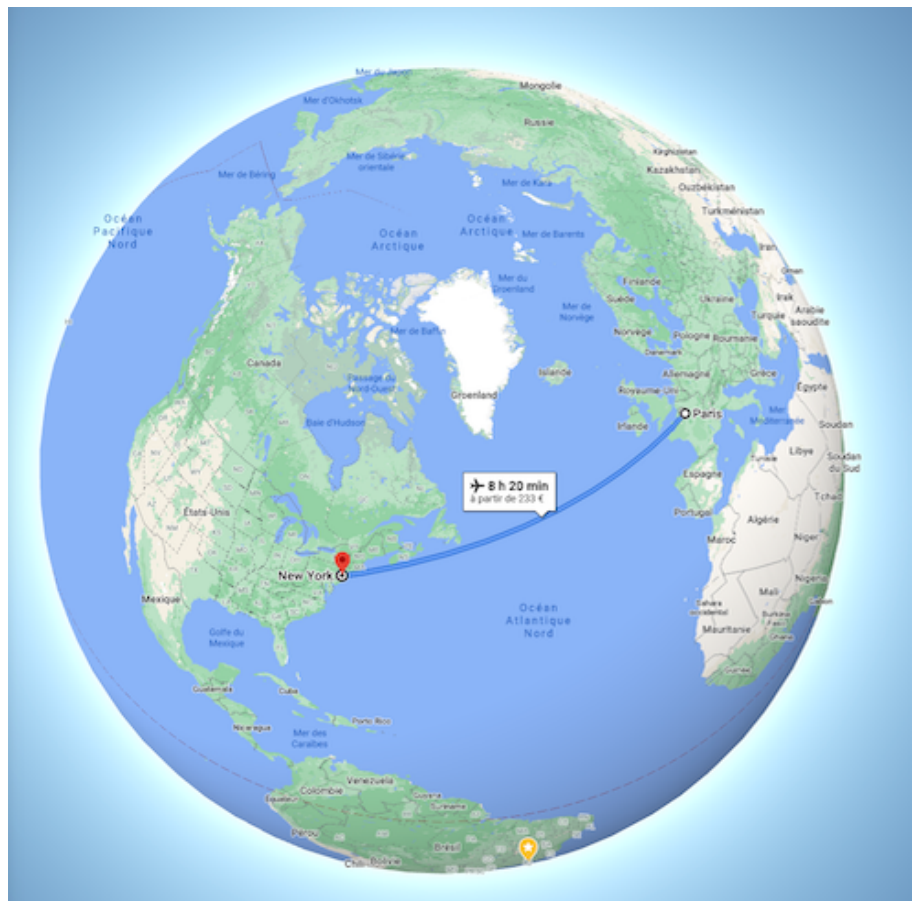


Figure 1 : Un Paris-New York pour 233 euros. ()

Une remarque cruciale que nous pouvons formuler dès à présent est qu'il est possible de renverser le point de vue précédent : si deux points P et N nous donnent une unique trajectoire les reliant, alors ces deux points déterminent aussi une unique *direction* (ou un cap, si vous préférez) au départ de P qui va vers N .

Autrement dit, dans une géométrie, il y a une *façon naturelle de se déplacer* : ainsi, si je vous donne un point P (Paris), ainsi qu'une direction, que nous notons v , au départ de ce point, vous pouvez « aller tout droit » en suivant la direction v , c'est-à-dire avancer naturellement de façon à ce que, lorsqu'après moult péripéties dignes de l'Odyssée d'Homère, vous aurez atteint votre point d'arrivée N (New-York), le chemin que vous aurez parcouru sera précisément le chemin le plus court allant de P à N . C'est plutôt ce point de vue que nous utiliserons par la suite : une géodésique est donc une trajectoire naturelle sur la surface générée par un couple de point/direction.

De façon plus générale, sur toute géométrie de dimension deux qui peut se *visualiser* dans l'espace à la façon de la Terre (les mathématiciens disent de telles surfaces qu'elles sont *plongées dans l'espace ambiant*), il est très facile de représenter les trajectoires géodésiques. C'est la minute travaux pratiques de notre article (mais vous êtes chanceux : il y en aura une également dans le second article !) : prenez votre plus beau vase en porcelaine de Chine (c'est un exemple tout à fait autorisé de surface) ainsi qu'un rouleau de scotch. Choisissez un point sur votre vase, ainsi qu'une direction au départ de ce point. Maintenant, fixez le scotch à ce point et déroulez-le dans la direction choisie *sans l'entortiller ni le plier volontairement* : le scotch va alors naturellement suivre la trajectoire géodésique générée par le point et la direction que vous avez choisis. Si vous n'avez pas



Figure 2 : Plusieurs trajectoires géodésiques sur un vase.
Image : Frédéric Faure. ()

de vase en porcelaine de Chine (dommage pour vous !), nous avons réalisé l'expérience en Figure 2 (#figure2).

Une représentation schématisée de la situation précédente (voir la Figure 3 (#figure3)) montre que la géodésique passant par le point x et de direction v est arrivée un peu plus loin au point x' avec la direction v' . Dans la géométrie du vase, il s'agit d'une trajectoire « en ligne droite » : autrement dit, une fourmi partant de x avec la direction v , et arrivant ensuite en x' aura eu l'impression de se déplacer sans tourner ni à gauche, ni à droite. Pour la fourmi, la direction v' est donc la même que la direction v , un peu comme si la fourmi se bornait à suivre la direction Nord d'une boussole. En termes mathématiques, on appelle une direction un *vecteur tangent* et on dit que le vecteur tangent v' est le *transport parallèle* du vecteur tangent v le long de la géodésique. Evidemment, du point de vue d'un observateur extérieur qui regarderait la fourmi se déplacer sur le vase, cela ne serait plus vrai : on voit ainsi que les vecteurs v et v' ont bel et bien bougé dans le référentiel de l'observateur (cf. la partie droite de la Figure 3 (#figure3)).

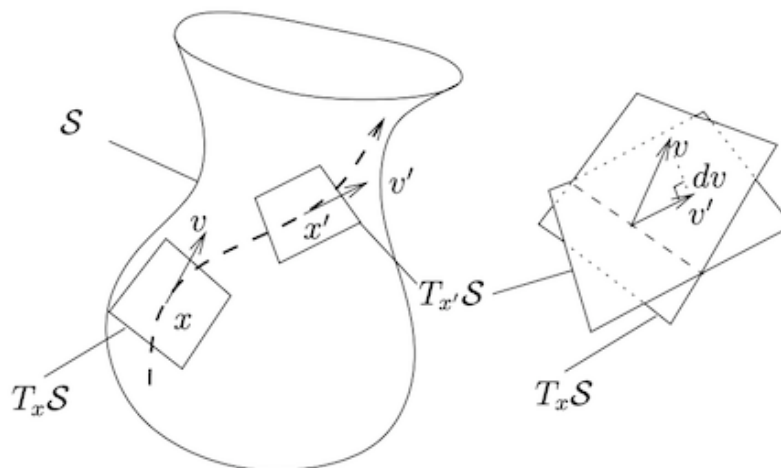
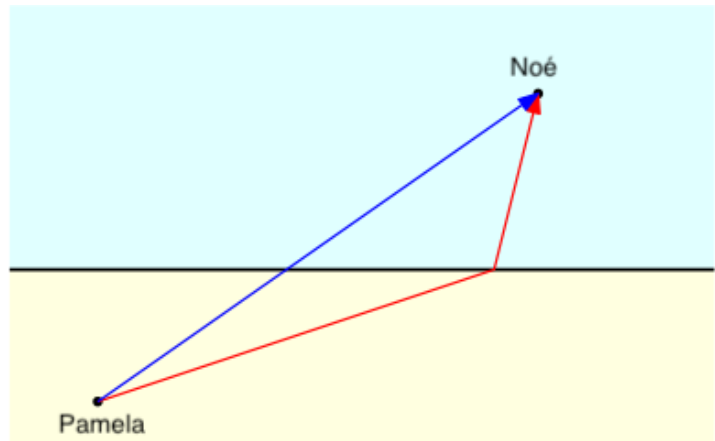


Figure 3 : Une trajectoire géodésique sur un vase. Image :
Frédéric Faure. ()

Formulons également une remarque importante : un même espace peut-être muni de plusieurs règles, qui donnent alors lieu à différentes géométries. Considérons le littoral de la ville américaine de Malibu, en Californie : Noé (N) s'y baigne dans les eaux chaudes du Pacifique, sous la surveillance

étroite de Pamela Anderson (P). Si d'aventure une mouette, passant au-dessus de Pamela (P), désirait se rendre au-dessus de Noé (N), elle n'irait pas par quatre chemins : elle parcourrait la distance à *vol d'oiseau*, comme on dit dans le langage commun, c'est-à-dire qu'elle irait tout droit (en bleu). Seulement, si Noé venait à se noyer et que Pamela voulait le sauver du déluge, elle ne prendrait pas le chemin de la mouette, car Pamela sait bien qu'elle court plus vite qu'elle ne nage ; et le chemin le plus *court* du point de vue de Pamela serait donc une ligne brisée, comme représenté en Figure 4 (#figure4) (en rouge). On voit donc qu'un même espace (le littoral de Malibu en l'occurrence) peut-être muni de deux règles différentes : l'une donnant lieu à la *géométrie de la mouette* dans laquelle les géodésiques sont des lignes droites (c'est en fait la *géométrie euclidienne* de dimension deux), l'autre donnant lieu à la géométrie de Pamela Anderson, dans laquelle les géodésiques sont des lignes brisées.

Ces exemples familiers de géométrie de dimension deux ne doivent pas nous faire croire que les espaces de dimension supérieure nous sont inconnus. Par exemple, il existe une géométrie de dimension trois que nous connaissons bien : c'est l'*espace euclidien* de dimension trois dans lequel nous vivons. La dimension de l'espace est déterminée par le nombre de degrés de liberté permis dans nos déplacements : comme nous pouvons nous mouvoir dans trois directions (en avant/en arrière, à gauche/à droite, en haut/en bas), il s'agit d'un espace tridimensionnel. Enfin, cet espace possède une règle (le mètre, la verge anglaise, le pied, le pouce, ... choisissez ici votre unité préférée) permettant de mesurer hauteurs, largeurs et longueurs : on sait donc dire que la tour Eiffel mesure aujourd'hui très précisément 324 mètres de haut, contre 312 mètres à l'époque de sa construction (et l'auteur de cet article serait bien curieux de connaître la raison de cette différence). Il y a donc ici tous les éléments d'une géométrie. Comme dans le cas de la géométrie de la mouette, les géodésiques y sont des lignes droites : c'est en fait une caractéristique de toutes les géométries dites *euclidiennes*.



Le sauvetage de Noé. ()

▼ Dans le jargon mathématique, (javascript:;)

Dans le jargon mathématique, un espace de dimension n est appelé une *variété de dimension n* ; une règle est appelée une *métrique riemannienne* ; et une géométrie est appelée une *variété riemannienne*.

Zoologie des géométries

Depuis le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855), on sait que l'une des caractéristiques principales d'une géométrie est sa *courbure*. Sur une surface, la courbure est relativement facile à décrire. Tout d'abord, elle dépend généralement du point x où l'on se trouve : c'est donc une *fonction*, définie sur la surface, que l'on note fréquemment $x \mapsto \kappa(x)$, et que l'on appelle *courbure de Gauss*. Pour le formuler de façon plus pédestre, la courbure en un point x de la surface est un nombre, noté $\kappa(x)$. Nous verrons dans la suite que ce qui joue un rôle important est le *signe* de cette fonction : est-elle positive en tout point ? nulle ? négative ? Y'a-t-il des points où la courbure est positive quand elle est négative en d'autres points ?

En dimension supérieure, la courbure n'est plus un simple nombre mais un *tenseur* (un grand tableau rempli de nombres !), ce qui complique quelque peu sa définition (nous renvoyons également à [cet](#)



Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

article ([Visualiser-la-courbure.html](#)) d'Images des Maths sur la notion de courbure). On le nomme *tenseur de courbure de Riemann*, en l'honneur du mathématicien allemand (lui aussi !) Bernhard Riemann (1826-1866) qui l'a découvert. Après Gauss, Riemann a été l'un des pères fondateurs de la géométrie qui porte désormais son nom et que nous décrivons dans cet article : la géométrie riemannienne. Il est également connu pour avoir énoncé une conjecture — peut-être la plus célèbre des mathématiques modernes et encore irrésolue à ce jour — qui a trait (entre autres) à la distribution des nombres premiers parmi



Bernhard Riemann (1826-1866).

les entiers naturels : la conjecture de Riemann.

Pour donner une première intuition de la notion de courbure, disons la chose suivante : une géométrie à courbure positive [1 (#nb1)] aura tendance à ressembler à la Terre et les géodésiques y sont des arcs de cercles ; une géométrie à courbure nulle aura tendance au contraire à ressembler à l'espace euclidien que nous connaissons bien, et les géodésiques y sont des segments de droites ; enfin, une géométrie à courbure négative ressemble plutôt à une selle de cheval (voir la Figure 6 (#figure6) ou la Figure 5 (#figure5), à droite) et les géodésiques y ont la forme d'hyperboles.

Bien sûr, tout cela est dit en des termes très vagues et demandera à être précisé. Ce qu'il est tout de même important de savoir est que *la courbure de l'espace ne dépend pas de la façon dont on le représente*. Autrement dit, il n'est nul besoin de décoller à bord de votre fusée et d'observer la Terre depuis l'espace pour conclure que celle-ci est une sphère et donc que sa courbure est positive ; il est en fait possible, grâce à des mesures réalisées par des hommes à la surface du globe, d'en calculer la courbure et d'en déduire que celle-ci est sphérique. Pensez : les Egyptiens l'avaient compris il y a plus de deux millénaires et, paraît-il, sans construire de fusées ! C'est ce que Gauss a découvert et nommé le *Theorema Egregium* (théorème important, littéralement) : la courbure d'une géométrie en est une donnée purement *intrinsèque*, c'est-à-dire qu'elle ne nécessite pas d'observations extérieures (dans une fusée par exemple !) pour être déterminée. Autrement dit, elle peut-être calculée par des habitants à sa surface.

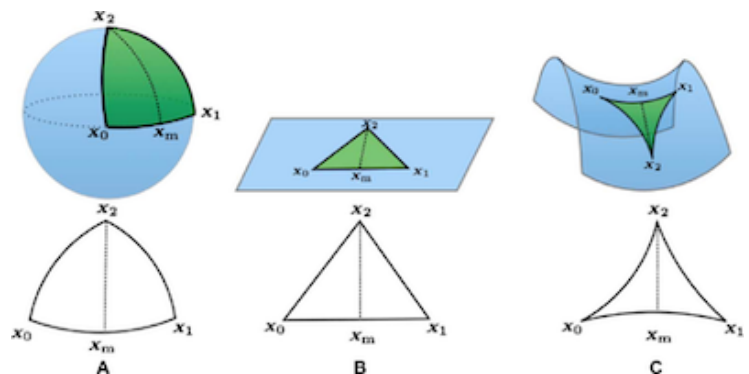


Figure 5 : Les triangles en géométrie à courbure positive ou sphérique (à gauche), courbure nulle ou euclidienne (au centre), courbure négative ou hyperbolique (à droite). Le point x_m est notre point de référence autour duquel on veut calculer la courbure. ()



Figure 6 : Une vraie selle de cheval. ()

Calculer la courbure

Tout cela est bien beau, me direz-vous, mais comment je la calcule ta courbure de Gauss, moi ? Eh bien, figurez-vous que Gauss n'était pas le dernier des imbéciles (croyez-moi !) : il a également remarqué que la notion de courbure est purement *locale*, c'est-à-dire qu'elle est définie en tout point de la surface, et que sa valeur en un point x ne dépend que de la géométrie au voisinage de x . On peut y penser comme à un nombre qui mesure l'obstruction locale de la géométrie à être euclidienne (les mathématiciens disent aussi *plate*) : plus la courbure est positive et/ou négative, et moins l'espace sera plat. Précisons que ces trois termes sont pour nous synonymes : courbure plate, courbure nulle, géométrie euclidienne.

La courbure peut se calculer de façon remarquablement simple grâce à de petits triangles dessinés autour du point x , comme représenté à la Figure 5 (#figure5). Ce que l'on observe alors est la chose suivante : dans le plan euclidien que nous connaissons bien, la somme des angles d'un triangle est *toujours égale à 180 degrés* (du moins, c'est ce que l'auteur de ce billet a appris au collège !). En revanche, il est visuellement clair que le triangle dessiné sur la sphère (à gauche) ne présente plus cette propriété : la somme de ses angles *excèdera toujours 180 degrés* ; à l'inverse, le triangle dessiné sur la surface hyperbolique vérifiera toujours que la somme de ses angles sera *strictement inférieure à 180 degrés*. On vous a donc menti toute votre vie ! il existe bel et bien des triangles dont la somme des angles ne fait pas 180 degrés, si l'on accepte bien sûr de quitter le monde de la géométrie euclidienne. En d'autres termes, la courbure de Gauss peut s'interpréter intuitivement comme le défaut :

$$\text{défaut} = \text{somme des angles (dans les petits triangles)} - 180 \text{ degrés.}$$

Il existe même une formule permettant de quantifier exactement ce défaut en terme de la courbure : *la formule de Gauss-Bonnet*, probablement considérée par de nombreux mathématiciens comme l'une des plus belles des mathématiques.

▼ La formule de Gauss-Bonnet (javascript:;)

La formule de Gauss-Bonnet s'énonce comme suit :

$$\text{défaut} = \int_{\text{triangle}} \kappa_g(x) dx.$$

Ici, $\kappa_g(x)$ désigne la valeur de la courbure de Gauss au point x de notre surface, et dx est

l'élément de volume naturel (riemannien). Pour obtenir le défaut d'angle du triangle, on intègre la quantité $\kappa_g(x)dx$ sur tout le triangle. Dans le cas particulier où la géométrie est sphérique, la courbure est constante égale à $+1$. On trouve alors que le défaut d'angle est égale à l'aire du triangle, ce qui est en particulier une quantité positive. Dans le cas où la géométrie est hyperbolique, la courbure est constante égale à -1 , et le défaut d'angle est l'opposé de l'aire du triangle : c'est donc négatif.

Bien qu'il existe des géométries à courbure mixte, c'est-à-dire ayant des zones de courbure positive puis négative (et le vase en est un exemple !), nous les laisserons de côté pour un temps, et nous concentrerons sur la trichotomie évoquée plus haut : géométries à courbure positive, nulle ou négative. C'est tout particulièrement ce dernier type de géométrie qui nous intéressera ici.

Les géométries à courbure négative

À quoi ressemble les géométries à courbure négative ? Elles sont assez difficiles à représenter, la raison principale étant que, contrairement au cas de la Terre, elles ne se *plongent* pas bien dans l'espace ambiant. Cette notion de plongement est assez difficile à cerner pour le non-mathématicien : disons simplement qu'il est toujours possible de représenter dans l'espace *une portion de la surface* mais rarement la surface dans son intégralité. Le modèle de la selle de cheval, déjà introduit à la Figure 6 (#figure6), est donc cette « portion locale » qu'il faut avoir en tête. Néanmoins, comme les mathématiciens sont les personnes les moins rigoureuses du monde (!), ils trichent et aiment toutefois dessiner dans leur globalité leurs chères surfaces hyperboliques. L'image qui suit est donc fausse !

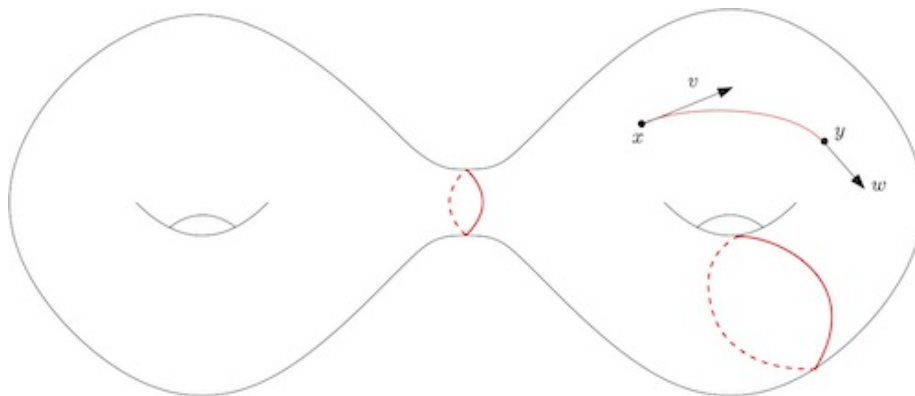


Figure 7 : La représentation erronée d'une surface hyperbolique particulière. En rouge sont dessinées trois trajectoires géodésiques : deux sont des boucles périodiques (ou fermées), et nous intéresseront par la suite dans un second article, tandis ce que la troisième est un simple segment géodésique partant de x (avec la direction v) et arrivant en y (avec la direction w). (!)

En quoi cette image est-elle fausse ? Eh bien, ce double donut (ou cette double bouée, si vous avez le pied marin) que les mathématiciens nomment *le tore à deux trous* ou *le tore de genre deux* présente un certain nombre de zones à courbure négative (comme l'anneau central, par exemple, ou bien les parties intérieures des trous des donuts) mais également des zones à courbure positive (!), comme les parties extérieures, choses que nous ne voulons évidemment pas. Alors pourquoi les mathématiciens s'acharnent-ils à dessiner des choses fausses ? Parce qu'à force, elles finiront peut-être par devenir vraies ? Pas tout à fait... Mais il est possible de montrer qu'en oubliant un peu la géométrie et en tordant la surface comme s'il s'agissait d'un bloc de



pâte à modeler, elle finira par ressembler à ce tore à deux trous.

Disons à présent un mot sur les géodésiques dans les géométries à courbure négative : si l'on se donne deux couples point/direction suffisamment proches et que l'on regarde les géodésiques qu'ils génèrent, il semble que celles-ci aient tendance à diverger très vite, contrairement aux géométries sphériques ou euclidiennes [2 (#nb2)] (voir la Figure 8 (#figure8)). Ce phénomène est particulièrement remarquable et nous verrons par la suite qu'il est à l'origine du chaos dans la dynamique des trajectoires géodésiques sur les surfaces à courbure négative.

Une compression du sculpteur César. Certes, les mathématiciens ne font pas subir de telles compressions à leurs objets (quoique !), mais ils aiment bien les étudier à des « déformations près ». On appelle *topologie* cette branche des mathématiques.

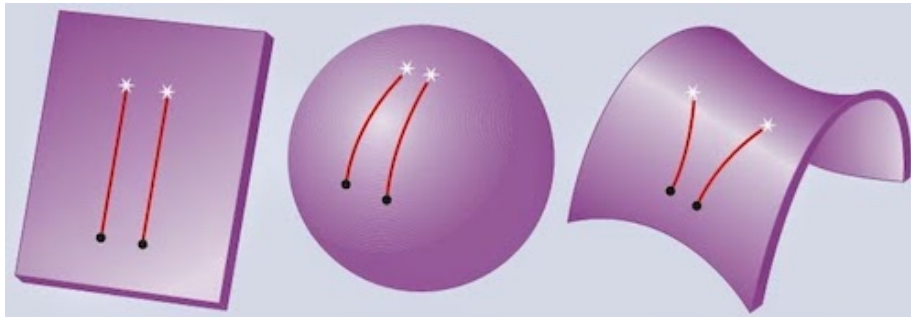
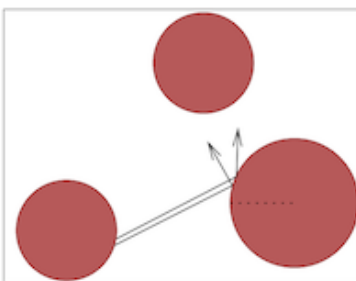


Figure 8 : Sur une surface à courbure négative, deux trajectoires géodésiques initialement proches auront tendance à diverger (à droite). Ce n'est pas le cas en revanche en courbure plate ou positive (à gauche). ()

Pour bien comprendre cela, nous allons exhiber l'analogie entre les dynamiques de type *billards de Sinai* et les surfaces à courbure négative (nous renvoyons à [cet article \(Systemes-dynamiques-et-billards.html\)](#) d'Images des Maths pour plus de détails). Un billard de Sinai est une table (de billard !) sur laquelle sont disposés un certain nombre d'obstacles convexes comme des disques, par exemple. On lance alors une boule de billard (ou une particule si vous préférez, car il est plus pratique de penser à la boule comme un objet sans dimension) dans une certaine direction de la table et on observe sa trajectoire, en supposant l'absence de frottements : la boule va alors indéfiniment rebondir contre les obstacles et décrire une trajectoire erratique sur la table. Chaque rebond se fait selon les lois de l'optique (dites de Snell-Descartes), c'est-à-dire que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Qui plus est, on considère souvent par soucis de simplicité des billards de Sinai périodiques, ce qui revient à imaginer que la table de billard est un *tore* : autrement dit, tout comme dans le célèbre jeu Snake, lorsque la boule sort de la table à droite, elle revient à gauche de la table avec la même direction.



Un billard de Sinai ; en blanc, la table de billard sur laquelle des obstacles convexes rouges ont été posés ; en noir, deux trajectoires de boules. Image : Frédéric Faure.

Quel lien, me direz-vous, entre nos chères surfaces à courbure négative et les billards de Sinai ? Il consiste en l'observation suivante : considérons deux feuilles de papier, disposées parallèlement à l'horizontale que l'on relie en une extrémité au moyen d'une attache en forme de selle de cheval (voir la Figure 9 (#figure9)). La partie qui constituent les deux feuilles de papier est plate, mais la partie de la selle de cheval est à courbure négative, comme nous l'avons déjà expliqué au paragraphe précédent. On note $\epsilon > 0$ la taille de l'attache : plus ϵ est petit, et plus l'attache est petite. Ce que l'on observe également, c'est que plus ϵ est petit, et plus la courbure de la selle de cheval est négative.

Considérons ensuite deux trajectoires géodésiques (en bleu et en rouge sur la Figure 9 (#figure9)) arrivant parallèlement par la feuille du haut : après avoir passé l'attache (qui est à courbure négative), ces géodésiques vont diverger, comme nous l'avons expliqué plus haut, ce qui crée un angle de sortie entre la trajectoire rouge et la bleue. On regarde alors l'évolution

de trajectoires lorsque ϵ se rapproche de 0. Et, ô miracle ! dans l'hypothèse où ϵ pourrait devenir *égal* à 0 (c'est-à-dire que l'attache serait de taille nulle, ce qui forcerait en pratique sa courbure à être infinie !), les trajectoires géodésiques correspondraient *exactement* aux trajectoires d'un billard de Sinaï !



Une capture d'écran du jeu Snake sur téléphone.

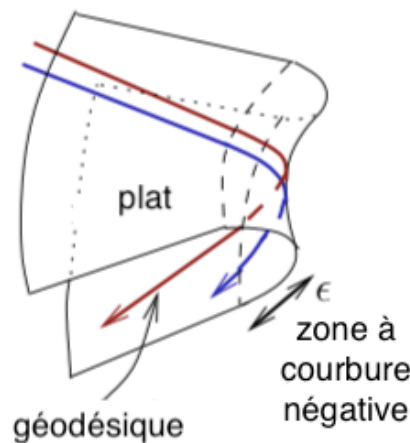
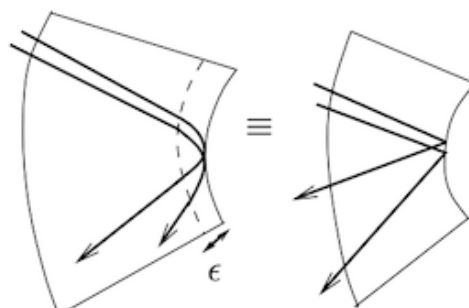


Figure 9 : Le recollement de deux feuilles horizontales au moyen d'une selle de cheval. ()

On voit donc apparaître un lien fécond entre dynamique des billards et la dynamique des géodésiques sur les surfaces à courbure négative. Nous garderons ce parallèle en tête par la suite avec l'idée suivante : si un certain phénomène est observable sur un billard de Sinaï, alors il y a fort à parier qu'il soit également observable sur une surface à courbure négative ! [3 (#nb3)]



La limite dans le cas où la taille de l'attache est nulle.

L'émergence du chaos

Concentrons-nous encore quelques instants sur les billards avant d'extrapoler nos observations au cas des surfaces à courbure négative. Il n'est pas bien difficile de faire tourner des simulations sur ordinateur pour les billards : on lance une particule, et on observe l'évolution de sa trajectoire dans le temps. C'est ce qui est représenté à la Figure 10 (#figure10) : à gauche, on observe les neuf premiers rebonds de la particule sur les obstacles ; à droite, on observe la trajectoire après un très

grand nombre de rebonds. On remarque déjà que la trajectoire a presque entièrement *rempli* la table de billard (il ne reste que très peu d'espace blanc !). Il faut imaginer qu'il se passe exactement la même chose pour une trajectoire géodésique sur une surface à courbure négative. Par exemple, si l'on revient à la Figure 7 (*#figure7*) (notre fausse représentation de surface à courbure négative), la trajectoire générée par un couple point/direction (x, v) va « remplir » la surface sans laisser trop de blanc [4 (*#nb4*)].

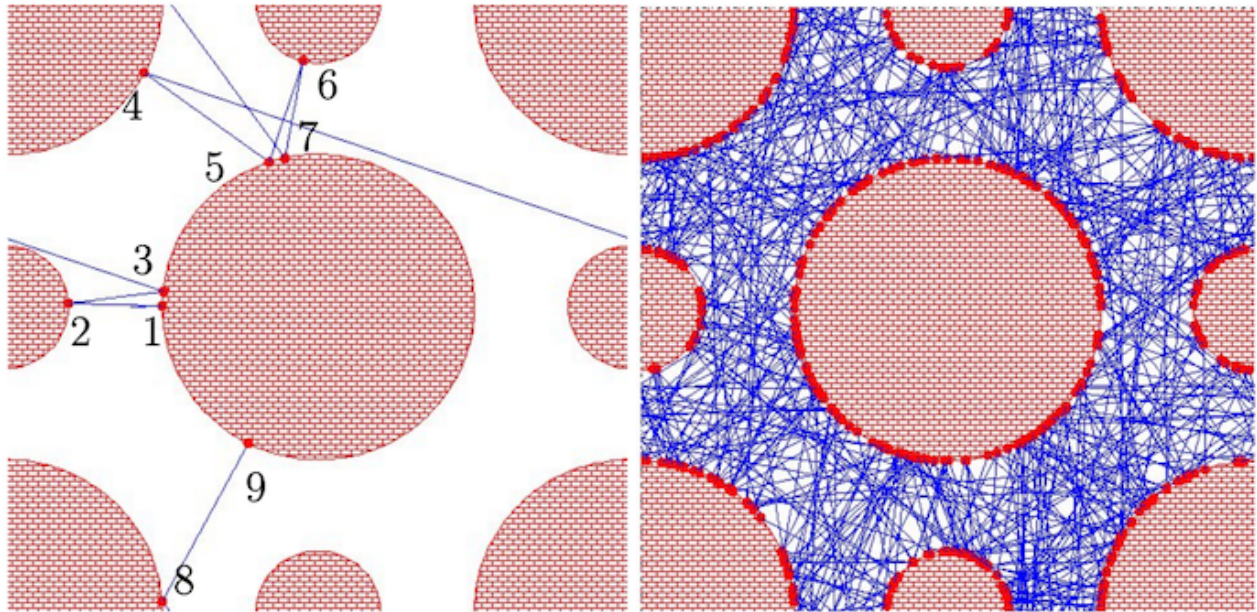


Figure 10 : La trajectoire d'une particule individuelle. A gauche, les numéros correspondent à l'ordre des rebonds sur les différents obstacles. A droite, on observe la trajectoire de la particule en temps long. Image : Frédéric Faure. ()

Ceci n'est pourtant pas suffisant pour parler de chaos : il existe en fait des systèmes dynamiques présentant très peu de propriétés chaotiques mais qui exhibent ce même genre de phénomène. Ce qu'il nous faut ajouter, c'est si l'on vous donnait le point d'arrivée de la particule après tous ces tumultueux rebonds, il semblerait bien difficile de remonter jusqu'à l'*état initial* de la particule avant les rebonds tant la moindre erreur ou approximation quelque part fausserait la suite de votre calcul (cela arrive, même aux meilleurs !). On peut qualifier ce phénomène de *sensibilité aux conditions initiales* : deux particules partant du même point avec des directions presque semblables finiraient invariablement par diverger, et ce, très rapidement (exponentiellement vite, en fait). C'est ce que l'on observe tout d'abord en Figure 11 (*#figure11*) : on lance sur la table de billard un nuage de particules avec des positions et des directions quasiment identiques, et l'on remarque qu'en très peu de rebonds, celles-ci finissent par prendre des positions et des directions nettement distinctes.

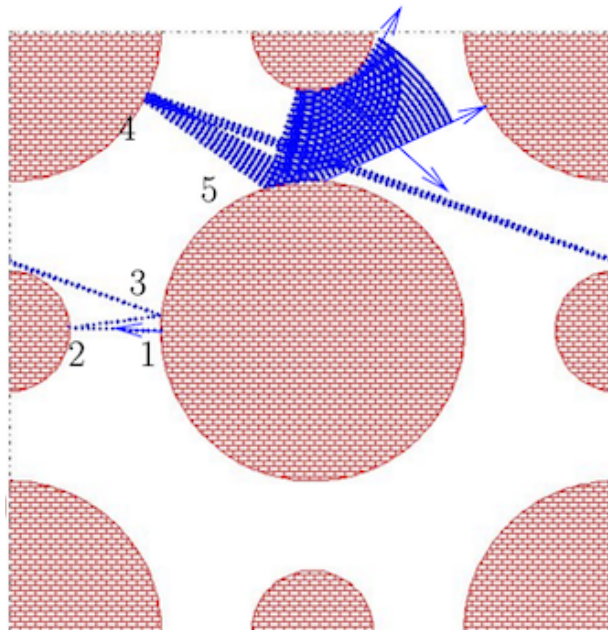
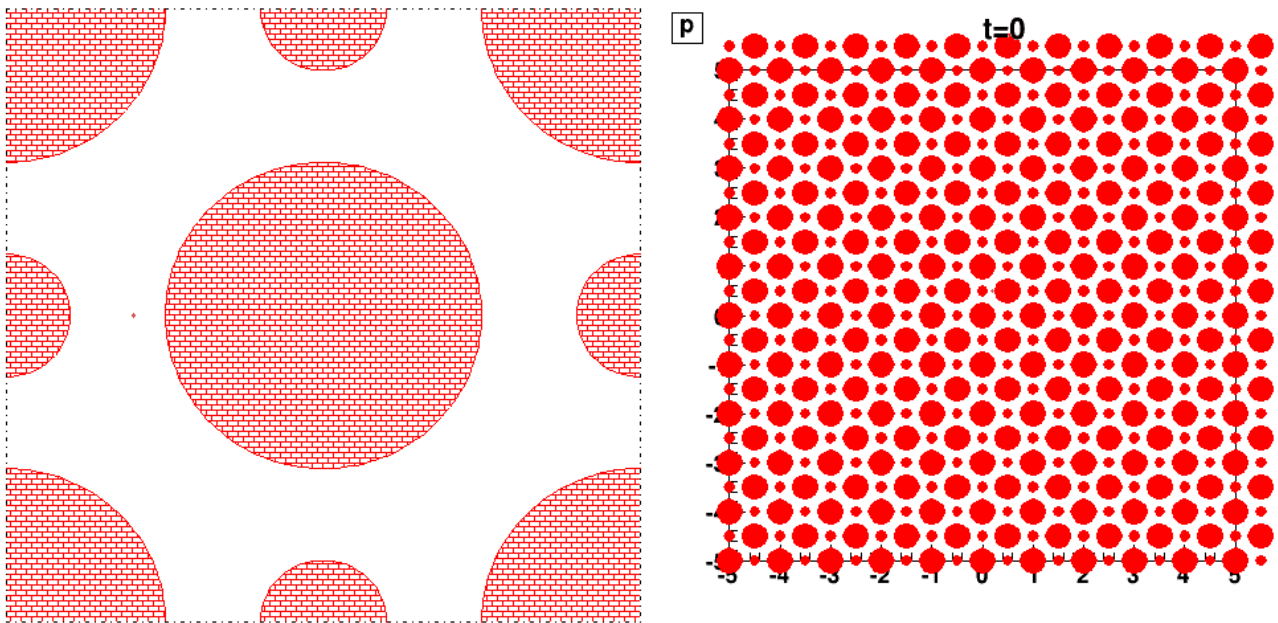


Figure 11 : Un nuage de particules avec des conditions initiales proches fini par diverger. Image : Frédéric Faure.
()

Si on laisse le temps évoluer plus longtemps, on observe alors (voir la Figure 12 (#figure12)) que le nuage s'est totalement réparti sur la table de billard, qui plus est, sans laisser de trou : on parle d'*équi-répartition* ou d'*équi-distribution*. Ce phénomène est similaire à la diffusion d'un gaz de particules dans une enceinte (nous renvoyons également à la [page web](http://lmba.math.univ-brest.fr/perso/francoise.pene/pageweb_1.html) (http://lmba.math.univ-brest.fr/perso/francoise.pene/pageweb_1.html) de Françoise Pène qui traite de cette question) : imaginons qu'à l'instant initial, toutes les particules soient concentrées en une toute petite portion de l'enceinte, dans une petite fiole hermétique placée dans l'enceinte par exemple ; dès l'instant où l'on débouche la fiole, le gaz s'en échappe et se répand très vite et de façon aléatoire dans toute l'enceinte ; qui plus est, cette répartition se fait de façon *homogène*. C'est exactement le même genre de phénomène que l'on observe à la Figure 12 (#figure12) et dans la vidéo ci-dessous : un amas très concentré de particules donne très rapidement lieu à un nuage homogène sur tout le billard.

Conseil pratique : si la vidéo a déjà commencé, rafraîchissez la page pour la faire redémarrer.



La dynamique des particules dans un billard de Sinai : on lance un amas de particules initialement très concentrées (c'est-à-dire avec des positions et des directions similaires) et on observe son évolution au cours du temps. Lorsque les particules rencontrent un obstacle, elles rebondissent (selon les lois de Snell-Descartes, l'angle de réflexion étant égal à l'angle d'incidence). On remarque que cet amas va très rapidement s'équi-répartir sur tout le billard et donner un nuage homogène de particules. Image : Frédéric Faure.

Il est même possible de montrer que le phénomène d'équi-répartition de la Figure 12 (#figure12) se produit *exponentiellement vite* en temps : c'est un théorème difficile qui n'a été démontré qu'en 2018 par la mathématicienne franco-suisse Viviane Baladi et ses deux collaborateurs (et non moins mathématiciens !) Mark Demers et Carlangelo Liverani, et auquel Images des Maths avait déjà consacré un article (voir [cet article](#) (*De-l-algorithme-de-Google-aux-billards-de-Sinai.html*)) d'Images des Maths).

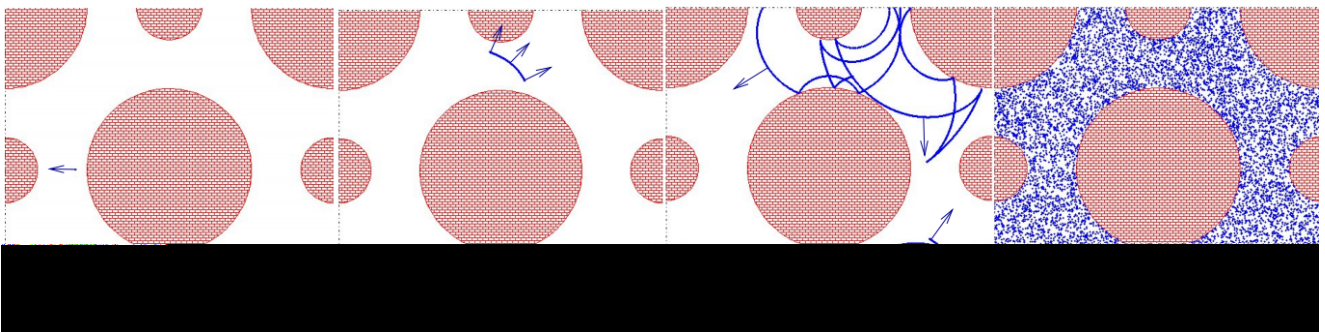


Figure 12 : Les particules s'équidistribuent sur la table de billard. Tout à droite : représentation de la trajectoire du nuage de particules dans le billard que l'on *périodise* la table, c'est-à-dire que l'on reproduit comme un pavage sur tout le plan. Image : Frédéric Faure. ()

Les observations que nous venons de faire mettent en évidence les propriétés fondamentalement chaotiques de la dynamique des particules dans le billard de Sinai [5 (#nb5)]. Il se produit dans le cas des surfaces à courbure négative un phénomène tout à fait similaire : les trajectoires géodésiques y sont aussi erratiques et imprévisibles. Nous verrons dans un second article qu'il existe pourtant des trajectoires tout à fait remarquables qui, à l'inverse des trajectoires erratiques, ne visitent qu'une

infime portion de la surface : ce sont les trajectoires *périodiques*, que nous avons déjà rencontrées à la Figure 7 (*#figure7*) (les deux boucles rouges). Elles sont certes peu nombreuses, mais tout de même suffisamment bien réparties dans la surface pour encoder des informations importantes sur sa géométrie. C'est ce que l'on appelle le *spectre marqué des longueurs* : la suite au prochain numéro !

Post-scriptum :

Je remercie Nicolas Bédaride, Jean Delcourt, Romain Dujardin et Quentin Gendron pour leur relecture. Un grand merci à Pierre-Antoine Guihéneuf pour ses conseils avisés et ses relectures attentives, et à Frédéric Faure, qui a fourni la plupart des images (dont la belle figure du vase, qui n'est malheureusement pas en porcelaine de Chine...) et toutes les simulations numériques.

Article édité par Guihéneuf, Pierre-Antoine (*_Guiheneuf-Pierre-Antoine_.html*)

NOTES

[1 (*#nh1*)] Non nécessairement constante.

[2 (*#nh2*)] Cette phrase appelle quelques remarques. Premièrement, quand bien même les droites représentées en géométrie euclidienne (à gauche) sont parallèles (elles ne divergent donc pas ...), deux droites sécantes produiraient le même effet optique contrairement à la courbure négative (à droite) : elles sembleraient diverger assez lentement. Deuxièmement, il est possible de donner un sens rigoureux à cette assertion que la divergence semble se produire *plus vite* en courbure négative : cela tient au fait que le *flot géodésique* (ou, disons, les trajectoires géodésiques) présentent un caractère *uniformément hyperbolique* (ou *Anosov*, pour les mathématiciens) en courbure négative.

[3 (*#nh3*)] Cette remarque appelle un petit commentaire car, pour les mathématiciens, c'est le chemin inverse qui est le plus naturel : il est plus facile d'étudier des surfaces à courbure négative que des billards. En revanche, pour le non-initié, il est plus facile de se représenter un billard qu'une surface hyperbolique !

[4 (*#nh4*)] Mathématiquement, il faudrait dire "le couple point/direction (x, v) va *presque-sûrement* remplir la surface. Cela signifie que si l'on piochait au hasard un couple point/direction, la probabilité qu'un tel phénomène se produise est égale à 1.

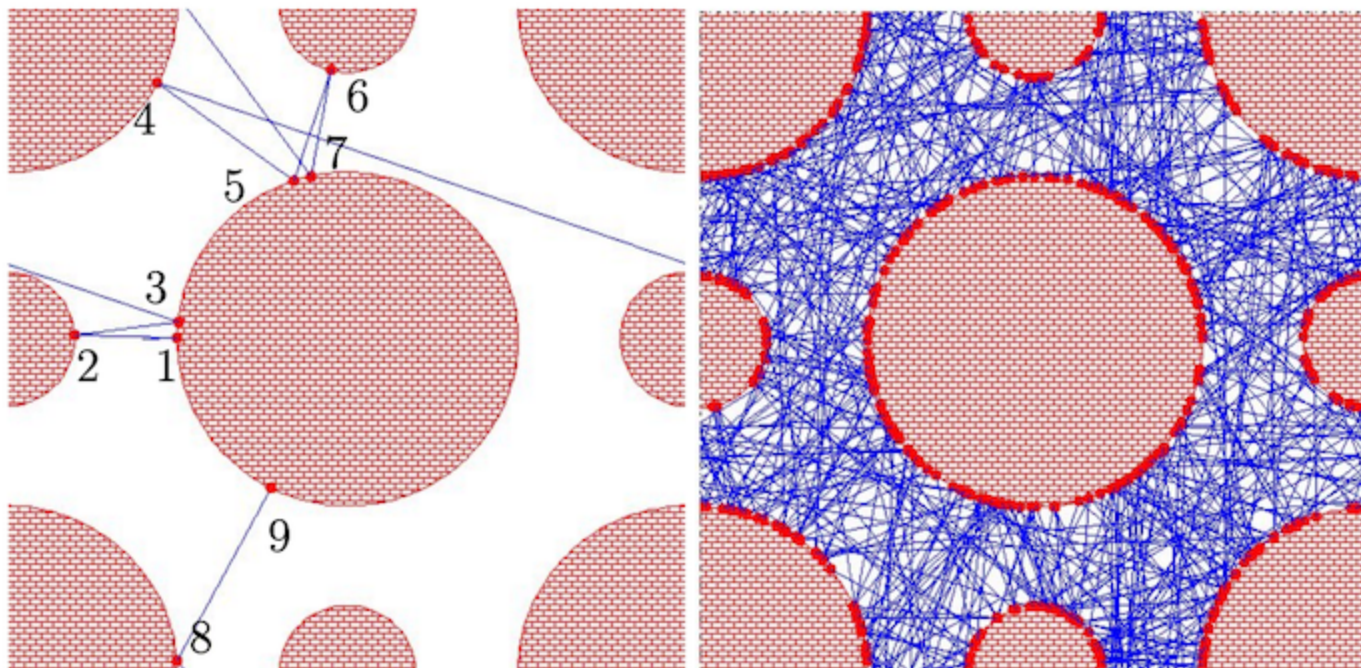
[5 (*#nh5*)] Pour plus de détails sur la dynamique chaotique, nous renvoyons également aux films « Chaos » de Jos Leys, Etienne Ghys et Aurélien Alvarez.

Les problèmes inverses géométriques (III)

LES GÉOMÉTRIES CHAOTIQUES : LE RETOUR

II. Le spectre marqué des longueurs

Piste rouge Ecrit par Lefeuvre, Thibault



Cet article est le deuxième volet de notre étude consacrée aux géométries chaotiques. Après avoir montré **dans un premier article** ([Les-geometries-chaotiques.html](https://images-des-maths.pages.math.cnrs.fr/freeze/Les-geometries-chaotiques.html)) comment la courbure négative peut être à l'origine de phénomènes chaotiques, nous nous intéressons ici au *spectre marqué des longueurs* de ces géométries. Ce dernier est une suite de nombres, correspondant à des trajectoires remarquables, rares mais suffisamment bien réparties dans la géométrie, et qui ont la propriété d'être *périodiques*. Il est conjecturé par les mathématiciens que ce spectre encode entièrement la géométrie... mais pour le moment, ceci est une question ouverte !

▼ [Ami lecteur](#), (`javascript:;`)

si le premier article est encore frais dans ta mémoire, ce bloc de rappel n'est pas pour toi. En revanche, si ta mémoire te fait défaut (ou si, pire encore, tu as osé franchir les portes du second niveau sans avoir terminé le premier !), voici une piqure de rappel :

Courbure, vous avez dit courbure ?

Dans le précédent article, nous avons expliqué qu'une géométrie (de dimension deux) est une surface sur laquelle on met une règle, permettant d'y calculer des distances : la Terre en est un bel exemple. Or il se trouve que notre bonne vieille Terre n'est pas une pizza (enfin, me semble-t-il...), contrairement à ce que crurent certains de nos ancêtres : elle présente de la courbure.

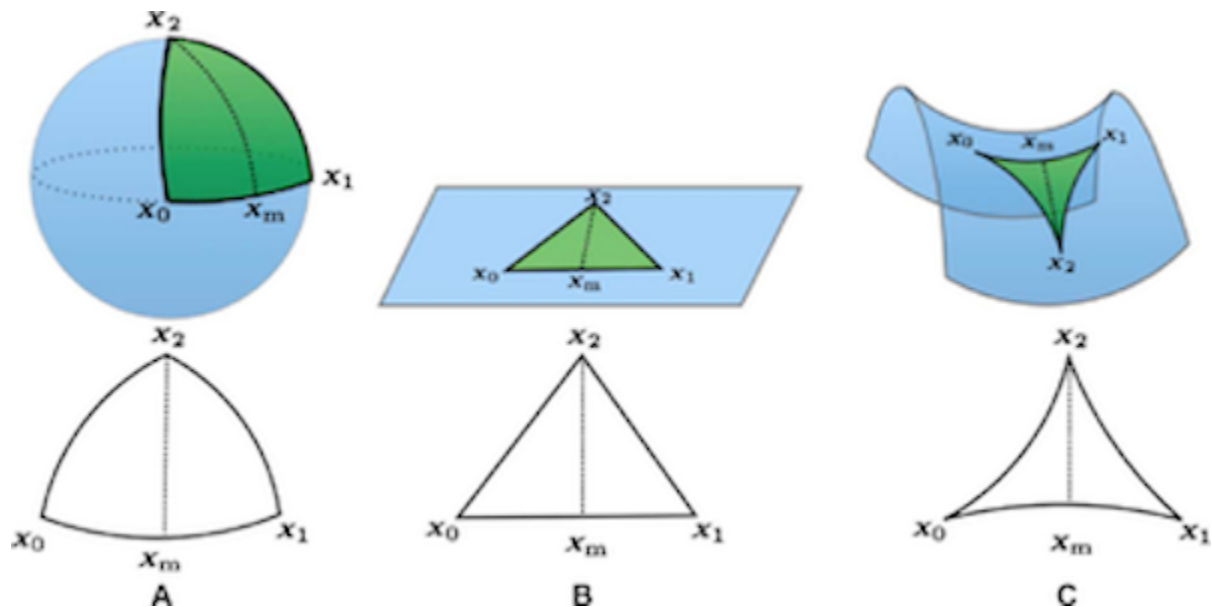


Figure 1 : Trois géométries : courbure positive (à gauche), plate (au centre), négative (à droite). ()

Nous avons expliqué que la courbure d'une surface est un nombre pouvant se calculer en tout point et mesurant l'obstruction de celle-ci à être plate, c'est-à-dire semblable au plan euclidien que nous connaissons bien. Lorsque la courbure est positive, la surface a tendance à ressembler à la Terre, et les triangles que nous dessinons dessus ont la propriété remarquable d'avoir la somme de leurs angles internes supérieure à 180 degrés ! A l'inverse, en courbure négative, la surface ressemble plutôt à une selle de cheval et les triangles sont fins, c'est-à-dire que la somme de leurs angles internes est inférieure à 180 degrés (voir la figure 1 (#figure1)).

Il existe sur toutes les surfaces, qu'elles soient courbées ou non, une façon naturelle de se déplacer en suivant des trajectoires dites géodésiques : ce sont tout simplement les trajectoires qui minimisent la distance entre deux points. Par exemple, sur la Terre, la

trajectoire géodésique reliant Paris à New York est un arc de cercle (centré au noyau de la Terre). Au lieu de se donner deux points, et de les relier par une trajectoire géodésique, on peut également se donner un point ainsi qu'une direction (un cap, si vous préférez) : la trajectoire géodésique consiste alors à « aller tout droit » en suivant le cap. Dans le plan ou l'espace euclidien, la trajectoire géodésique consiste bel et bien à parcourir une droite.

En revanche, en courbure négative, nous avons vu que les trajectoires géodésiques avaient la fâcheuse (ou heureuse !) tendance à diverger, même lorsqu'elles semblaient initialement proches (voir la figure 2 (#figure2)). C'est ce que l'on appelle une forte sensibilité aux conditions initiales, qui est l'une des propriétés fondamentales des systèmes chaotiques. Cela conduit la

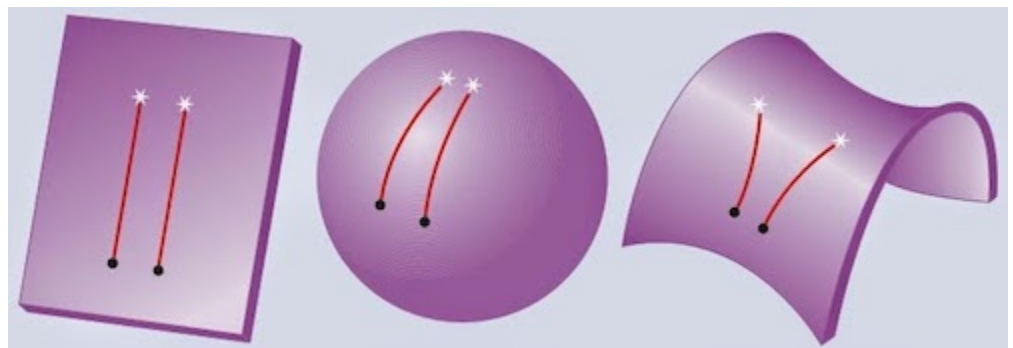
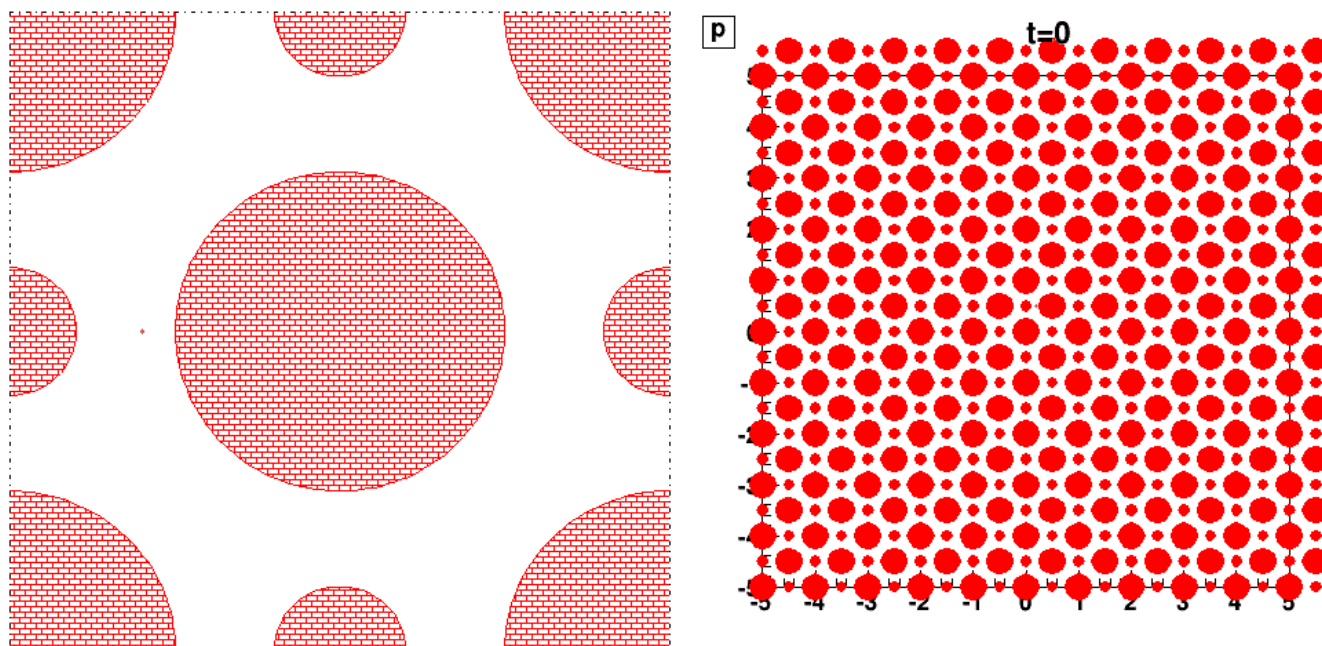


Figure 2 : En courbure négative (à droite), deux trajectoires géodésiques initialement proches ont tendance à diverger. ()

majorité des trajectoires à faire « n'importe quoi » sur la surface, c'est-à-dire à décrire des lignes qui semblent imprévisibles. Nous l'avons illustré dans le précédent article en montrant l'analogie qui existait entre cette dynamique des trajectoires géodésiques, et la dynamique des billards de Sinai : ces derniers consistent à étudier le mouvement de nuages de particules qui rebondiraient contre des obstacles disposés de façon périodique dans le plan. Ils permettent entre autres de modéliser des gaz dits de Lorentz. En outre, nous avons observé grâce à des simulations numériques, que les déplacements des particules sur ces billards étaient totalement chaotiques, et qu'en très peu de temps, des nuages de particules très concentrés s'équi-répartissaient très vite sur toute la surface du billard. C'est exactement le même phénomène qui se produit pour la dynamique des trajectoires géodésiques sur les surfaces à courbure négative.



La dynamique des particules dans un billard de Sinai : on lance un amas de particules initialement très concentrées (c'est-à-dire avec des positions et des directions similaires) et on observe son évolution au cours du temps. Lorsque les particules rencontrent un obstacle, elles rebondissent (selon les lois de Snell-Descartes, l'angle de réflexion étant égal à l'angle d'incidence). On remarque que cet amas va très rapidement s'équi-répartir sur tout le billard et donner un nuage homogène de particules. Image : Frédéric Faure.

Comment décrire le chaos ?

Nous avons expliqué dans le premier article que la trajectoire géodésique de la *plupart* des particules ne peut pas se comprendre raisonnablement, sinon d'un point de vue statistique. Ceci se traduit par les deux observations suivantes :

- au bout d'un certain temps, la trajectoire géodésique d'une particule individuelle aura presque « rempli tous les blancs »,
- un amas initialement très concentré de particules tend à s'équi-répartir en un nuage homogène très rapidement sur la surface, à l'image de ce qui se produit dans un billard de Sinai (voir la vidéo du bloc déroulant).

Il n'y a malheureusement pas tellement de réponse plus satisfaisante à apporter [1 (#nb1)], ce qui, pour les mathématiciens, vous en conviendrez, est tout de même assez décevant. Il existe néanmoins des trajectoires tout à fait remarquables, et beaucoup plus rares, dont le comportement est à l'opposé de celui, chaotique, de l'écrasante majorité des points : ce sont des trajectoires

périodiques. Nous avons représenté (de façon quelque peu erronée) une surface à courbure négative en figure 3 (#figure3) : on y observe trois trajectoires géodésiques ; l'une est un simple segment reliant le point x au point y ; les deux autres sont des trajectoires périodiques, ce sont les deux boucles rouges.

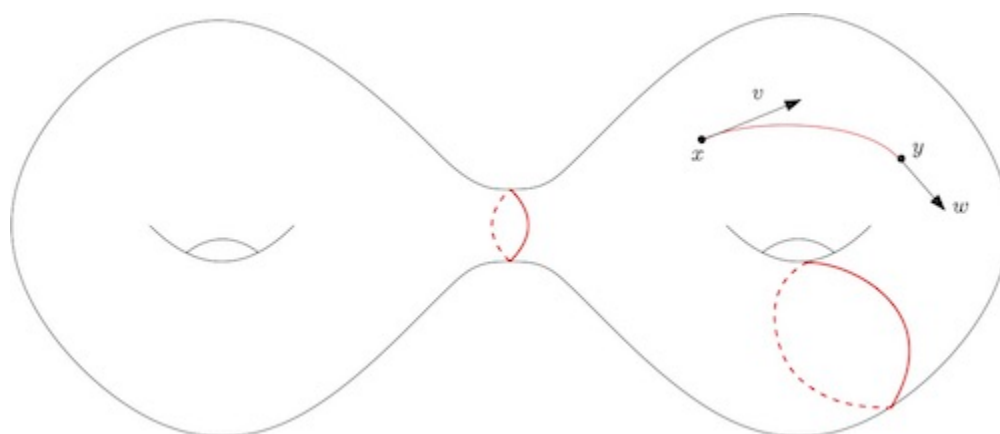


Figure 3 : Un exemple de trajectoire géodésique sur une surface. ()

Ces trajectoires périodiques ne visitent en fait qu'une très faible partie de la surface, et le mouvement de la particule y est très simple : cette dernière tourne le long d'un même cercle avant de revenir à son point de départ. Et une fois le point de départ atteint, elle repart pour un nouveau tour ! On appelle *période* le temps que la particule met pour revenir à son point de départ.

Si nous oublions deux minutes nos chères géométries à courbure négative (et dans lesquelles les trajectoires périodiques sont rares mais existent !), il est très facile de trouver une géométrie dans laquelle abondent les trajectoires périodiques... Voyez-vous à qui je pense ? Notre bonne vieille Terre ! Eh oui, si l'envie vous prend de poursuivre la trajectoire géodésique de votre Paris-New York (qui est un grand cercle, nous le rappelons, dont le centre n'est autre que le noyau de la Terre et passant à la fois par Paris et New-York), vous finiriez, après de longues heures de navigation (et pourvu que vous ayez suffisamment de kérosène !) par revenir à Paris. En fait, dans le cas d'une sphère, il est facile de formuler l'observation suivante : *toutes les trajectoires géodésiques sont périodiques, qui plus est de même période*. Ce phénomène est si particulier qu'on lui a donné un nom : on parle de *géométries de Zoll*, du nom du mathématicien allemand (encore !) Otto Zoll, qui les a découvertes au début du siècle dernier. Si d'aventure vous voulez briller en société, n'hésitez pas à mentionner que la Terre est un exemple de surface de Zoll, cela produit toujours son petit effet ! En 1978, Arthur Besse, qui n'est autre que le pseudonyme inventé par un groupe de mathématiciens dirigé par Marcel Berger (1927—2016) [2 (#nb2)] leur a même consacré une monographie intitulée en français *Variété dont toutes les géodésiques sont fermées*.

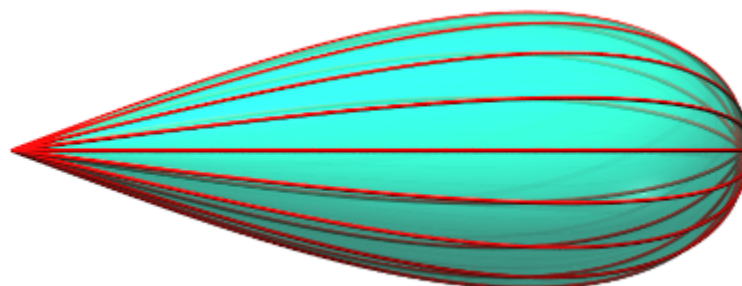


Figure 4 : La Poire de Tannery est un autre exemple bien connu de surface de Zoll. Elle a été découverte par le mathématicien français Jules Tannery en 1892. L'article original est disponible [ici](https://archive.org/stream/s2bulletindessci16fran#page/n195/mode/2up) (<https://archive.org/stream/s2bulletindessci16fran#page/n195/mode/2up>) ()

Le cas des surfaces à courbure négative que nous nous proposons d'étudier est bien loin des surfaces de Zoll ! Les géodésiques périodiques y sont très rares, et nous allons même dans un instant les *classifier*. Mais, tout aussi paradoxal que cela soit, bien que rares, ces géodésiques périodiques sont suffisamment nombreuses pour encoder des informations essentielles sur le comportement à long terme des trajectoires géodésiques. Par exemple, il est possible de montrer que les trajectoires périodiques sont *denses* dans la surface, ce qui signifie la chose suivante : étant



Marcel Berger (1927—2016) est un mathématicien français de renom qui a beaucoup contribué à la géométrie (différentielle, riemannienne).



Jacques Hadamard (1865—1963), l'un des plus célèbres mathématiciens français, a œuvré dans de nombreux domaines : analyse complexe, théorie des nombres, géométrie différentielle ...

donné un couple de point/direction sur la surface (et dont la trajectoire géodésique a de très grandes chances d'être totalement imprévisible !), il existe une trajectoire périodique passant très proche de ce point (en fait, aussi proche que l'on veut).

Classifier les géodésiques périodiques : tout n'est qu'affaire d'élastique...

Pour classifier les géodésiques périodiques sur nos surfaces à courbure négative, il nous faut introduire la notion de *classe d'homotopie libre*. Derrière ce nom barbare se cache en fait une idée tout à fait élémentaire, que nous allons immédiatement mettre en pratique. C'est le moment de sortir papiers et ciseaux (ou presque !) : nous avons bien promis dans le premier article une seconde minute travaux pratiques. Munissez-vous d'un élastique, ainsi que d'un objet quelconque qui jouera le rôle de notre surface : un rouleau de Sopalin, par exemple, ou bien une orange, une pomme, votre porte-manteau, que sais-je encore...

Une *courbe* sur une surface n'est rien d'autre que la position que peut prendre un élastique sur cette même surface : si vous enroulez l'élastique autour du rouleau de Sopalin, vous obtenez ainsi une courbe que nous noterons c_1 (voir la figure 5 (#figure5)). On dit alors que deux courbes appartiennent à la même classe d'homotopie libre si il est possible de passer de l'une à l'autre par un déplacement de l'élastique. Dans le cas du rouleau de Sopalin, il est très facile de voir que la courbe c_2 appartient à la même classe d'homotopie libre que c_1 (il suffit pour cela de déplacer l'élastique le long du rouleau). En revanche, pour c_3 , ce n'est pas le cas : à moins, bien sûr, de tricher et d'enlever l'élastique du rouleau de Sopalin... ! La courbe c_3 est un cas tout à fait particulier : on dit

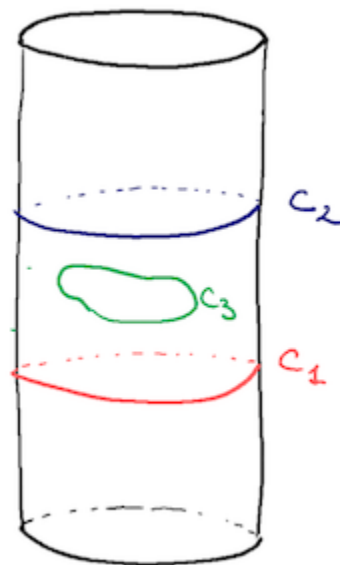


Figure 5 : Représentation schématique d'un rouleau de sopalin sur lequel on aurait attaché trois élastiques c_1 , c_2 et c_3 . Les élastiques c_1 et c_2 appartiennent à la même classe d'homotopie libre mais la classe de c_3 est différente. ()

qu'elle est homotopiquement triviale, ou que sa classe d'homotopie est triviale, car il est en fait possible d'écraser l'élastique continûment sur un point (ce qui n'est évidemment pas le cas des classes c_1 et c_2). Vous pouvez ainsi vous amuser à chercher les différentes classes d'homotopie libre de votre objet (notamment s'il présente des « trous », comme un donut) .

Munis de cette belle notion de topologie (c'est ainsi que l'on appelle la branche des mathématiques chargée d'étudier les objets à déformation continue près), nous pouvons énoncer le théorème fondamental de classification suivant, dû au mathématicien français Jacques Hadamard (1865—1963) :

Théorème de Hadamard :

Dans une géométrie à courbure négative, il existe dans chaque classe d'homotopie libre non triviale une unique géodésique périodique. Cette géodésique est la courbe de plus petite longueur dans la classe.

Attention ! La courbure négative est essentielle dans l'énoncé de ce théorème car, sans elle, il serait facile de trouver des exemples qui le contredisent : sur le rouleau de Sopalin, qui n'est rien d'autre qu'un cylindre plat, il existe dans chaque classe d'homotopie libre une infinité de géodésiques périodiques. Par exemple, sur la figure 5 (#figure5), c_1 en est une ainsi que c_2 , de même que toutes les courbes obtenues par *translation* dans la longueur du rouleau. En revanche, si l'on oublie le rouleau de Sopalin plat mais que l'on considère un *rouleau de Sopalin hyperbolique* (et pourquoi pas ?!), ou tout autre surface de forme semblable et à courbure négative, comme la superbe jardinière de la figure 6 (#figure6), là, les conclusions du théorème s'appliquent.



Figure 6 : Une jardinière en forme de cylindre hyperbolique.
En noir : les bords de la jardinière. En rouge : la position initiale de notre élastique (attention : ce n'est pas une géodésique !). En bleu : l'unique géodésique périodique du cylindre hyperbolique, obtenue en minimisant la longueur de notre élastique. ()

Remarquez également que ce théorème nous renseigne sur la façon de chasser les géodésiques périodiques : si vous placez votre élastique (en rouge) dans la classe d'homotopie des courbes qui s'enroulent une seule fois autour de la jardinière hyperbolique de la figure 6 (*#figure6*) (comme les courbes c_1 et c_2 de notre exemple précédent), et que vous cherchez à minimiser sa longueur, vous vous apercevez qu'il faut placer l'élastique dans la position bleue, c'est-à-dire au niveau de l'anneau central du cylindre. Vous obtenez ainsi facilement l'unique géodésique périodique du cylindre hyperbolique vivant dans cette classe d'homotopie libre. Dans ce cas très particulier, il est en fait possible de montrer qu'il n'existe qu'une seule classe d'homotopie libre intéressante (les autres consistent tout simplement à s'enrouler deux fois, trois fois, etc. autour de la partie cylindrique), ce qui montre également qu'il n'existe qu'une unique géodésique périodique [3 (*#nb3*)]. Cela tombe bien, nous l'avons trouvée [4 (*#nb4*)] !

Un mot également sur la dimension supérieure : il est encore possible de définir une notion de classe d'homotopie libre en dimension 3, 4 ..., bien que celle-ci soit évidemment plus compliquée à visualiser. Là encore, en courbure négative, il existe une unique géodésique périodique par classe d'homotopie libre.

Dans tous les cas, les classes d'homotopie libre d'un espace peuvent se *dénombrer*, ou encore se *numéroter* : elles forment un ensemble infini mais discret, tout comme les nombres entiers naturels 1, 2, 3 ... par exemple.

Le spectre marqué des longueurs

Nous pouvons désormais introduire l'objet central de notre étude, le *spectre marqué des longueurs*.

Définition :

Le spectre marqué des longueurs d'une géométrie est la donnée, pour chaque classe d'homotopie libre, de la longueur de l'unique géodésique périodique dans cette classe.

Comme nous l'avons vu, l'étude des trajectoires géodésiques sur les variétés à courbure négative révèle des propriétés chaotiques comme une extrême sensibilité aux conditions initiales. En outre, les géodésiques périodiques sont rares mais suffisamment nombreuses pour être denses. Il est donc naturel de chercher à comprendre l'information qu'elles peuvent encoder sur la géométrie de l'espace : par exemple, dans quelle mesure la donnée de leur longueur nous renseigne-t-elle sur la géométrie ? Autrement dit, quelle information géométrique porte le spectre marqué des longueurs ? La conjecture suivante a été formulée en 1985 par les mathématiciens Keith Burns et Anatole Katok : elle stipule que le spectre marqué encode précisément *toute l'information géométrique*.

Conjecture de Burns-Katok :

Une géométrie à courbure négative est déterminée par son spectre marqué des longueurs. Autrement dit, la connaissance de la longueur de l'unique géodésique périodique dans chaque classe d'homotopie libre, permet de reconstruire entièrement la structure géométrique de l'espace.

En termes plus mathématiques, ce que nous appelons ici *géométrie* est la donnée d'un espace M (une variété différentielle, pour les mathématiciens), muni d'une règle, permettant de mesurer des longueurs (une métrique, notée g). C'est en fait cette règle qui encode toute la géométrie. L'espace M étant toujours supposé connu, ce que nous cherchons à déterminer est la métrique g . La conjecture peut se reformuler comme si : étant donné deux géométries (c'est-à-dire deux règles g_1 et g_2 sur le même espace M) à courbure négative, et ayant même spectre marqué des longueurs, sont-



Christopher B. Croke.

entendu, il est difficile de s'imaginer connaître pour une surface à courbure négative particulière l'intégralité de son spectre marqué des longueurs : on imagine donc mal reconstruire *en pratique* une surface grâce au théorème précédent. Néanmoins, la force de cette conjecture, si elle devait être prouvée, réside dans l'observation suivante : un système totalement chaotique, comme une géométrie à courbure négative, est en fait encodé par un nombre discret (mais infini) de nombres que sont les longueurs des géodésiques périodiques. C'est un peu comme si l'on disait qu'il suffisait de connaître la taille des trous d'un morceau d'emmental pour pouvoir entièrement le reconstruire (soyons fous : à l'aide d'une imprimante 3D par exemple ! évidemment, le goût en pâtirait...). Ou bien que des mesures de temps de propagation de certaines ondes sismiques permettaient de reconstruire la structure du manteau terrestre !



Jean-Pierre Otal

elles indiscernables (on dit aussi *isométriques*, en langage mathématique) ? [5 (#nb5)] Cette notion d'*isométrie* des géométries peut en fait se comprendre intuitivement : par exemple, une feuille de papier est isométrique à un rouleau de sopalin, car il est possible d'enrouler la feuille (sans la déformer, ni la plier, ni la déchirer) sur elle-même pour former un cylindre ; en revanche, une feuille de papier n'est pas isométrique à une sphère : si vous essayez de recouvrir une orange grâce à votre feuille de papier, il y aura inévitablement des déchirures !

Bien



Colin Guillarmou.

Dans le cas des surfaces à courbure négative qui nous a jusqu'à présent intéressé, il n'y a malheureusement (ou heureusement !) plus grand chose à prouver quant à la conjecture de Burns-Katok : deux mathématiciens, le français Jean-Pierre Otal et l'américain Christopher B. Croke, l'ont indépendamment résolue en 1990. Leurs preuves, assez similaires en esprit, reposent néanmoins de façon cruciale sur le fait que les trajectoires géodésiques *s'intersectent* très souvent sur les surfaces [6 (#nb6)], ce qui est loin d'être le cas en dimension supérieure et empêchent ainsi leurs preuves d'être généralisées à de plus hautes dimensions.

En revanche (avis aux amateurs !), la conjecture de Burns-Katok reste totalement ouverte en dimension

supérieure. Quelques résultats partiels ont été obtenus au cours de la décennie 1990, mais tous étaient relativement loin de résoudre le problème : mentionnons ici les noms de Anatole Katok, Ursula Hamenstädt, et les travaux du trio français Gérard Besson, Gilles Courtois, Sylvestre Gallot.

Pendant vingt ans, la question n'a pas tellement avancé et il a fallu attendre 2018 pour qu'un nouveau pas significatif soit franchi. Avec Colin Guillarmou, nous avons démontré une version *locale* de la conjecture de Burns-Katok qui peut s'énoncer comme suit :

Théorème (Guillarmou-L. 2018) :

Si deux géométries à courbure négative sont suffisamment proches et ont même spectre marqué des longueurs, alors ce sont les mêmes.

Que veut-on dire par *suffisamment proches* ? Une façon intuitive de l'expliquer est de dire que si l'on essaie de plaquer nos géométries l'une sur l'autre à la façon des courbes de la figure 7 (#figure7), alors l'écart que l'on observerait entre les deux serait petit. Voilà pour l'explication ; mais pour ce qui est de la preuve, c'est encore une autre paire de manches !

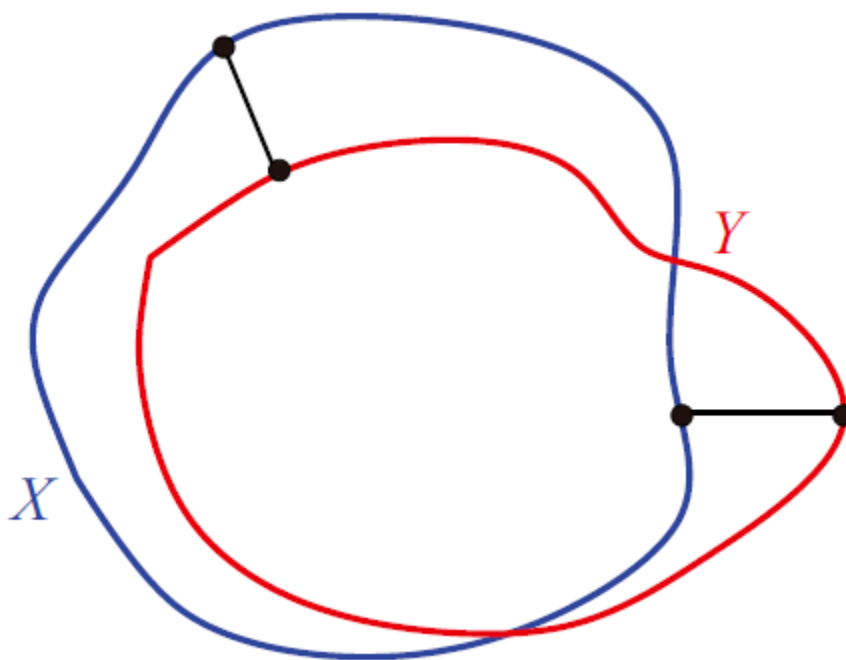


Figure 7 : La distance entre deux géométries peut se calculer de la même façon que la distance entre deux courbes. ()

Post-scriptum :

Je remercie Pierre-Antoine Guihéneuf pour sa relecture attentive et son enthousiasme à l'égard de cette série de deux articles sur les géométries chaotiques. Je remercie également Nicolas Bedaride, Vincent Garot et Arnaud Triay pour leur relecture de l'article et leurs commentaires.

Article édité par Guihéneuf, Pierre-Antoine ([_Guiheneuf-Pierre-Antoine_.html](#))

NOTES

[1 (#nh1)] Enfin si, mais cela dépasserait largement le cadre de cet article ! La question que se pose les mathématiciens est alors : à quelle « vitesse » les blancs vont-ils se remplir ?

[2 (#nh2)] Historiquement, un certain nombre de mathématiciens français s'étaient également

regroupés à partir de la fin des années 30 sous le pseudonyme de Nicolas Bourbaki. Leur but était de publier une présentation cohérente des mathématiques, qu'ils jugeaient alors quelque peu dispersées.

[3 (#nh3)] Modulo quelques histoires d'orientation que nous passons allègrement sous silence.

[4 (#nh4)] Le lecteur attentif notera qu'il semble ici exister une contradiction entre la densité des géodésiques périodiques évoquées plus haut, et le fait que nous n'en trouvions qu'une seule ici. Cela vient du fait suivant : le cylindre hyperbolique n'est pas une surface fermée (il a des bords), ce qui change totalement le caractère dense des géodésiques périodiques.

[5 (#nh5)] La formulation mathématique exacte est la suivante : existe-t-il un difféomorphisme $\phi : M \rightarrow M$ isotope à l'identité tel que $\phi^* g_2 = g_1$?

[6 (#nh6)] On pourra songer au cas du plan euclidien : deux droites, à moins d'être parallèles, vont toujours s'intersecter. En revanche, dans l'espace euclidien de dimension trois, il est beaucoup plus rare que deux droites se rencontrent !