

Epreuve orale de mathématiques mineure

Exemples d'exercices posés à l'oral (session 2025)

1. Analyse – Étude de la convergence de  $f_n(x) = n x / (1 + n^2 x^2)$  et discussion de la dérivation terme à terme.
2. Analyse – Développement limité et régularité de  $f(x) = x e^{\{x^2\}} \sin(1/x)$ .
3. Fonction implicite : calcul de  $\partial z / \partial x(1,1)$  pour  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ,  $x + y + z = 0$ .
4. Intégration :  $f_n(x) = n \mathbb{1}_{\{[0,1/n]\}}(x)$ . Étudier les convergences et l'échange limite/intégrale.
5. Intégrale double :  $I(t) = \iint_{\{0 \leq y \leq x \leq t\}} e^{\{x-y\}} dx dy$ . Étudier  $I'(t)$  et sa limite.
6. Séries : convergence uniforme et dérivation de  $f(x) = \sum \sin(nx)/n^2$ .
7. Algèbre linéaire : matrice nilpotente  $A^3 = 0$ ,  $A^2 \neq 0$ . Déterminer la forme de Jordan.
8. Algèbre linéaire : étude spectrale de  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Interprétation géométrique.
9. Polynômes :  $T(P) = P' - P$  sur  $\mathbb{R}_2[X]$ . Matrice, valeurs propres et diagonalisation.
10. Équation différentielle :  $y'' + 2y' + y = e^{\{-x\}}$ . Solution générale et comportement.
11. Variation de la constante :  $y' = y + e^x$ . Cas général  $a y + b e^{\{cx\}}$ .
12. Optimisation :  $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 5$ , contrainte  $x + y = 2$ .
13. Probabilités : tirage d'urnes, espérance conditionnelle et probabilité a posteriori.
14. Probabilités : convergence en loi de  $X_n \sim \text{Bin}(n, 1/n)$  vers Poisson(1).
15. Probabilités : indépendance de variables binaires et contre-exemple.
16. Analyse vectorielle : champ gradient  $F(x,y) = (2xy, x^2 + 3y^2)$ .
17. Intégrales multiples :  $\iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} (x^2 + y^2) dx dy$  en coordonnées polaires.
18. Théorème de Green : énoncé et application au calcul d'aire.
19. Théorème de Rolle : fonction continue non dérivable violant la conclusion.
20. Discussion finale : continuité des opérateurs et théorèmes d'interversion.