3 Exercices posés

Dans le contexte de l'épreuve orale, nous insistons sur le fait que ces sujets ne doivent pas être considérés comme des problèmes écrits, tant la discussion avec l'examinateur est indissociable de l'énoncé.

* * *

Exercice 1. On se place sur $\mathbb{R}[X]$.

(1) Pour $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, on pose $N(P) = \sum_{k=0}^n a_k$. Est-ce que N est une norme ?

(2) Pour $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, on définit maintenant la norme $N(P) = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et on considère
$$S = \{P \in \mathbb{R}[X] : N(P) = 1\}.$$
Montrer que S est fermé borné. Est-il compact ? Et si N est maintenant défini par $N(P) = \sum_{k=0}^n |a_k|/(k+1)$?

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre 1. Montrer que
$$\mathbb{P}(X \geqslant n) \underset{n\to\infty}{\sim} \mathbb{P}(X = n).$$
Est-ce que le résultat reste vrai si le paramètre n'est plus 1 ?

Exercice 3. (1) L'application qui à une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ associe son polynôme caractéristique est-elle continue ?

(2) L'application qui à une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ associe son polynôme minimal est-elle continue ?

Exercice 4. Trouver tous les nombres réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que
$$\sum_{k=1}^n k^\alpha = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^\beta \qquad \text{pour tout entier } n \geqslant 1.$$

Exercice 5. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ partie non vide. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:
$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}.$$

(1) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant \|x - y\|$.

(2) Monter que $x \mapsto d(x, A)$ est continue.

(3) Montrer que $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ est continue.

Exercice 6. Soit $n \geqslant 1$ un entier et soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. On pose
$$Y_n = \prod_{k=1}^n X_k.$$

(1) Pour tout entier $\ell \geqslant 0$, calculer la limite de $\mathbb{P}(Y_n = \ell)$ lorsque $n \to \infty$.

(2) Montrer que pour tout $a > 1/2$,

$$\mathbb{P}\left(Y_n \geqslant (an)^n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 7. Soit $f : E \to E$ une application linéaire avec E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$

(2) $E = \text{Im } f + \text{Ker } f$

(3) $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$

(4) $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$.

Exercice 8. On coupe en deux un bâton. En moyenne, quelle est la longueur du plus petit bout ?

Exercice 9. Soit $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Pour $n \geqslant 1$, soit $f_n : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{n}{x} \cdot \left(f\left(x + \frac{x}{n}\right) - f(x) \right).$$

On suppose que la fonction $x \mapsto x f''(x)$ est bornée.

(1) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \geqslant 1} \left| f_n(x) - f'(x) \right| = 0.$$

(2) On suppose que $f(x)/x$ converge lorsque $x \to +\infty$ vers une limite notée L. Montrer que $f'(x) \to L$ lorsque $x \to \infty$.

Exercice 10. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère une suite $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. On pose

$$M_n = \min_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |X_{i+1} - X_i|.$$

(1) Étudier le comportement de $\mathbb{P}(M_n = 0)$ lorsque $n \to \infty$.

(2) Montrer que la suite $(\mathbb{E}[M_n])_{n \geqslant 2}$ est bornée.

Exercice 11. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère une suite $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur le segment $[0, n]$. On pose

$$M_n = \min_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |X_{i+1} - X_i|.$$

(1) Calculer $\mathbb{P}(M_n = 0)$.

(2) Montrer que la suite $(\mathbb{E}[M_n])_{n \geqslant 2}$ est bornée.

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{Im } f + \text{Ker } g = E$ si et seulement si $\text{Im } g \circ f = \text{Im } g$.

Exercice 13. Soit $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ continues. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k+1}{n}\right)}.$$

Exercice 14. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(1) Montrer qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversibles telles que $M = A + B$.

(2) Montrer qu'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables telles que $M = A + B$.

Que se passe-t-il si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 15. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels. On suppose que $a_n \to 0$ et que la série de terme général (b_n) est absolument convergente. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_{n+1-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Le résultat reste-t-il vrai si on suppose seulement que la série de terme général (b_n) converge ?

Exercice 16. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\alpha \geqslant 1$. Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$\dim(F+G)^\alpha + \dim(F\cap G)^\alpha \geqslant (\dim F)^\alpha + (\dim G)^\alpha$$

et étudier le cas d'égalité.

Exercice 17. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to\infty}{\sim} n!.$$

Exercice 18. Soient $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ deux séries entières à coefficients strictement positifs et de rayon de convergence infini. On suppose que $a_n/b_n \to L$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

a une limite quand $x \to \infty$. Que se passe-t-il si a_n et b_n ne sont plus supposés strictement positifs ?

Exercice 19. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Montrer que $u \circ u = 0$ si et seulement si il existe un projecteur p tel que $u = p \circ u - u \circ p$.

Exercice 20. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to\to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{x+y}.$$

Exercice 21. Soit $c > 0$. On considère une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels telle que $0 < a_n \leqslant c(a_{2n} + a_{2n+1})$ pour tout $n \geqslant 1$. Pour quelles valeurs de c la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ diverge-t-elle toujours ?

Exercice 22. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M \cdot M^T \cdot M = I_n$.

Exercice 23. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et p un projecteur de E. On note

$$C(p) = \{f \in \mathcal{L}(E) : p \circ f = f \circ p\}.$$

(1) Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $f \in C(p)$ si et seulement si Im p et Ker p sont stables par f.

On suppose dorénavant que E est de dimension finie.

(2) Quelle est la dimension de $C(p)$?

(3) Quelle est la plus grande et la plus petite dimension possible de $C(p)$?

Exercice 24. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée telle que $2u_n \leqslant u_{n+1} + u_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$. Est-ce que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge nécessairement ?

Exercice 25. Quelle est la valeur la plus probable d'une variable aléatoire de Poisson ?

Exercice 26. Soit $M > 0$ un nombre réel et soit $n \geqslant 2$ un nombre entier. On considère des variables aléatoires $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à valeurs dans $[-M, M]$ indépendantes et de même loi. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$ on pose

$$Y_k = X_1 \cdots X_k.$$

Trouver une CNS pour que $Y_1, \ldots, Y_n$ soient indépendantes.

Indication. On pourra commencer par traiter le cas où $X_1, \ldots, X_n$ sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

Exercice 27. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général $(\cos(1/n))^{n^\alpha}$.

Exercice 28. Soit $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs tels que $p_n/n \to \infty$ quand $n \to \infty$. Calculer

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} x^{p_n}.$$

Exercice 29. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(z) = \bar{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 30. (1) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(at)}{t^2} dt = c|a|.$$

(2) Soient X, Y deux variables aléatoires réelles à support fini, indépendantes et de même loi. Montrer que

$$\mathbb{E}[|X - Y|] \leqslant \mathbb{E}[|X + Y|].$$

Que se passe-t-il si leur support n'est pas fini supposé fini ?

Exercice 31. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

(1) On suppose que $f^5 = f$. Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

(2) Plus généralement, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. On suppose que $P(f) = 0$. Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Le résultat reste-t-il vrai si $P'(0) = 0$?

Exercice 32. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombre réels tels que $u_0 > 0$ et pour $n \geqslant 0$:

$$u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

Obtenir un équivalent simple de (u_n) lorsque $n \to \infty$.

Exercice 33. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application non constante telle que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$f(AB) = f(A)f(B).$$

Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $f(A) \neq 0$ si et seulement si A est inversible.

Exercice 34. Soit $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) pour toute suite x_n telle que $x_n \to x$ on a $f_n(x_n) \to f(x)$;

(2) f est continue et $f_n \to f$ uniformément.

Exercice 35. Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ on considère la série entière

$$f_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\, z^k.$$

(1) Justifier que la fonction génératrice G_X de X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

(2) Supposons que pour tout $k \geqslant 0$ on a $p_{n,k} \to p_k$. Montrer que la suite de fonctions génératrices (G_{X_n}) converge simplement vers G_X sur $[0, 1]$.

(3) Établir la réciproque.

Exercice 36. Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\operatorname{rg} v \circ u = \operatorname{rg} u$ si et seulement si $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.

Exercice 37. Soit $\alpha > 0$. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 0$ on pose

$$f_n(x) = x - \arctan(x) - n^\alpha.$$

(1) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ il existe un unique $x \geqslant 0$ tel que $f_n(x) = 0$, qu'on notera u_n dans la suite.

(2) Montrer que

$$u_n = n^\alpha + \pi/2 - \frac{1}{u_n} + o\left(\frac{1}{u_n}\right).$$

Exercice 38. Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. On note $\mathbb{E}(X)$ son espérance et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.

(1) Montrer que
$$\mathbb{P}(X \geqslant \mathbb{E}(X) + \lambda) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X) + \lambda^2}.$$

Indication. On pourra considérer $\mathbb{P}(X + t \geqslant \mathbb{E}(X) + \lambda + t)$ pour tout $t > 0$.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant toutes un moment d'ordre 2 (on ne les suppose pas forcément de même loi). On suppose que pour tout $n \geqslant 1$ on a $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $\mathbb{V}(X_n) \leqslant 1$. On pose
$$N = \min\{n \geqslant 1 : X_n \leqslant 1\}.$$

(3) Montrer que e^{aN} est d'espérance finie pour tout $a \in [0, \ln 2[$.

Exercice 39. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \geqslant 0$ on a
$$u_{n+1} = (n+1)u_n - (n+2).$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur u_0 pour que cette suite soit bornée.

Indication. On pourra considérer la suite $z_n = \frac{u_n}{n!}$.

Exercice 40. Soit E l'ensemble des applications f de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(0) = f(1) = 0$. Soit F l'ensemble des applications f de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour $f \in F$, on pose
$$I(f) = \int_0^1 e^t(f(t)^2 + f'(t)^2)dt.$$

(1) Soit $g \in E$. Calculer la dérivée en 0 de $\lambda \mapsto I(f + \lambda g)$.

(2) Montrer que I possède un minimum sur F et déterminer les points en lequel il est atteint.

Exercice 41. Soient A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = BA = 0$ et que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$. Montrer que $\mathrm{rg}(A+B) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$.

Exercice 42. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ l'équation $x^n = 2x + 1$ admet une unique solution positive et étudier son comportement lorsque $n \to \infty$.