ECOLE POLYTECHNIQUE **CONCOURS D'ADMISSION 2025**

Exemples de sujets d'ADS Maths – MPI

Sujet 1 : Théorème de point fixe

Ce sujet fait le tour des idées clés de l'analyse non linéaire autour de $\Phi(u) = 0$: contraction de Banach (Picard), Newton et sa convergence quadratique, inversion locale / fonctions implicites, puis Cauchy–Lipschitz. On attendait surtout que les candidats posent clairement le cadre (espace complet, Lipschitz, différentielles) et fassent sentir le fil conducteur : d'abord garantir l'existence et l'unicité, ensuite accélérer la résolution, enfin linéariser localement.

Dans l'ensemble, les candidats ont bien travaillé. Beaucoup maîtrisent le principe de contraction et savent l'illustrer proprement. Les meilleurs exposés se distinguent par un plan simple, des notations tenues et une attention aux constantes et aux domaines de validité (condition $k < 1$, bornes sur $d\Phi$ et $d^2\Phi$, contrôle de $[\Phi'(u)]^{-1}$, choix explicite d'un T pour Cauchy–Lipschitz). Ils expliquent l'idée de preuve plutôt que de se perdre dans les calculs, et ponctuent chaque résultat d'un exemple bref.

Les faiblesses les plus fréquentes : confondre Lipschitz et différentiabilité, oublier le $k < 1$, invoquer Newton sans justifier Taylor en norme d'opérateur ni l'inversibilité contrôlée, et présenter Cauchy–Lipschitz sans espace fonctionnel ni choix de T. Certains exposés restent trop proches du texte et manquent de fil directeur.

Sujet 2 : Chaine de Markov-File d'attente

Le sujet attendait une présentation claire des chaînes de Markov sur espace fini ou dénombrable : définition via une matrice stochastique, rôle de la loi initiale, interprétation de Q^n, propriété de Markov (simple puis forte), puis passage à la classification des états (récurrence/transience, classes de récurrence) avec un ou deux exemples parlants, typiquement la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$.

Dans l'ensemble, les candidats ont bien travaillé. Beaucoup posent correctement le cadre et la propriété de Markov et savent manipuler P_X , E_X et Q^n . Les meilleurs structurent l'exposé en enchaînant construction canonique → Markov forte (au temps d'arrêt) → noyau potentiel

$U(x, y) = \sum_n Q^n(x, y) \to$ classification, puis concluent par un verdict de récurrence/transience sur un exemple (par ex. $\mathbb{Z}$ou $\mathbb{Z}^2$ vs $\mathbb{Z}^3$). Les faiblesses les plus fréquentes : confusions entre « irréductible » et « récurrent », oubli de préciser la loi initiale, invocation de la Markov forte sans définir le temps d'arrêt.

Sujet 3 : Stabilité des solutions stationnaires

Le sujet demandait sur la stabilité des équilibres : poser ce qu'est un état stationnaire, rappeler les deux voies classiques (linéarisation autour de l'équilibre et fonctions de Lyapunov), dire quand l'analyse linéaire suffit (spectre à parties réelles négatives) et quand elle ne tranche pas (cas centre), puis conclure sur un ou deux exemples simples. L'énoncé autorisait d'ailleurs à ne traiter qu'une partie du dossier, à condition de garder un fil clair.

Dans l'ensemble, les candidats ont bien travaillé. La plupart installent correctement les définitions et enchaînent "j'identifie l'équilibre → je linéarise → je lis la stabilité sur le spectre". Les meilleurs précisent les hypothèses (régularité, voisinage) et expliquent ce qui se passe en cas centre, en proposant un vrai recours à Lyapunov. Ils illustrent par un court exemple en dimension 1 (signe de $f'(y_*)$), puis un système à deux variables, jusqu'au verdict "stable/instable".

Les faiblesses les plus fréquentes tiennent à des glissements d'hypothèses : confondre Lipschitz (utile à l'existence–unicité) et stabilité ; parler du spectre sans rappeler que c'est la **partie réelle** qui compte ; évoquer Lyapunov sans montrer le signe de $\dot{V}$ ni le domaine où il est contrôlé.

Sujet 4 : Opérateurs pseudo-différentiels

Le sujet attendait un exposé court et clair : dire ce qu'est un symbole, expliquer l'idée d'ordre, montrer comment on passe du symbole à l'opérateur, et surtout ce que cela change pour la régularité des solutions (perte ou gain de dérivées). Un mot sur l'ellipticité était bienvenu : à hautes fréquences, on peut inverser l'opérateur à une erreur lisse près. Un exemple simple devait boucler l'ensemble.

Dans l'ensemble, les candidats ont bien travaillé. Beaucoup ont posé le vocabulaire de base, relié l'outil au point de vue "espace vs fréquence" et donné un exemple qui montre l'effet sur la régularité. Les meilleurs ont gardé un fil très lisible : définition, construction de l'opérateur, impact sur les espaces de régularité, puis un mot sur l'ellipticité et, parfois, sur la composition des opérateurs, sans se perdre dans les détails techniques.

Les faiblesses les plus fréquentes tiennent à la confusion entre opérateurs différentiels et pseudo-différentiels, à des intégrales de définition récitées sans explication, et à des énoncés sur la régularité donnée sans préciser le sens (perte ou gain). Certains exposés ont également empilé des formules, au lieu d'expliquer en deux phrases ce que fait concrètement l'opérateur sur les hautes et basses fréquences

Sujet 3 : Stabilité des solutions stationnaires

Le sujet demandait sur la stabilité des équilibres : poser ce qu'est un état stationnaire, rappeler les deux voies classiques (linéarisation autour de l'équilibre et fonctions de Lyapunov), dire quand l'analyse linéaire suffit (spectre à parties réelles négatives) et quand elle ne tranche pas (cas centre), puis conclure sur un ou deux exemples simples. L'énoncé autorisait d'ailleurs à ne traiter qu'une partie du dossier, à condition de garder un fil clair.

Dans l'ensemble, les candidats ont bien travaillé. La plupart installent correctement les définitions et enchaînent "j'identifie l'équilibre → je linéarise → je lis la stabilité sur le spectre". Les meilleurs précisent les hypothèses (régularité, voisinage) et expliquent ce qui se passe en cas centre, en proposant un vrai recours à Lyapunov. Ils illustrent par un court exemple en dimension 1 (signe de $f'(y_*)$), puis un système à deux variables, jusqu'au verdict "stable/instable".

Les faiblesses les plus fréquentes tiennent à des glissements d'hypothèses : confondre Lipschitz (utile à l'existence–unicité) et stabilité ; parler du spectre sans rappeler que c'est la **partie réelle** qui compte ; évoquer Lyapunov sans montrer le signe de V ni le domaine où il est contrôlé.

Sujet 4 : Opérateurs pseudo-différentiels

Le sujet attendait un exposé court et clair : dire ce qu'est un symbole, expliquer l'idée d'ordre, montrer comment on passe du symbole à l'opérateur, et surtout ce que cela change pour la régularité des solutions (perte ou gain de dérivées). Un mot sur l'ellipticité était bienvenu : à hautes fréquences, on peut inverser l'opérateur à une erreur lisse près. Un exemple simple devait boucler l'ensemble.

Dans l'ensemble, les candidats ont bien travaillé. Beaucoup ont posé le vocabulaire de base, relié l'outil au point de vue "espace vs fréquence" et donné un exemple qui montre l'effet sur la régularité. Les meilleurs ont gardé un fil très lisible : définition, construction de l'opérateur, impact sur les espaces de régularité, puis un mot sur l'ellipticité et, parfois, sur la composition des opérateurs, sans se perdre dans les détails techniques.

Les faiblesses les plus fréquentes tiennent à la confusion entre opérateurs différentiels et pseudo-différentiels, à des intégrales de définition récitées sans explication, et à des énoncés sur la régularité donnée sans préciser le sens (perte ou gain). Certains exposés ont également empilé des formules, au lieu d'expliquer en deux phrases ce que fait concrètement l'opérateur sur les hautes et basses fréquences.