

2.6

Travail demandé :

Il vous est demandé d'étudier puis de présenter le texte joint à travers un exposé de synthèse d'une durée comprise entre 15 et 20 minutes.

Si l'étude de la totalité du dossier et la préparation d'un exposé cohérent dans la durée impartie ne vous paraît pas possible, vous pouvez décider de vous limiter à une partie du dossier.

Remarques générales :

1. Les textes proposés, quelle que soit leur origine, peuvent présenter des défauts (coquilles typographiques, négligences ou sous-entendus de l'auteur, voire erreurs...) qui, sauf exception, n'ont pas été corrigés.
2. Les textes proposés peuvent contenir des exercices qu'il n'est pas demandé de résoudre. Néanmoins, vous pouvez vous aider des énoncés de ces exercices pour enrichir votre exposé.
3. Vous pouvez annoter les documents qui vous sont fournis. Vos annotations ne seront pas regardées par l'examineur.

Remarque particulière :

Dans le document, il est question de l'*enveloppe convexe* d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 : l'enveloppe convexe de $E \subset \mathbb{R}^2$ est le plus petit sous-ensemble convexe (au sens de l'inclusion) de \mathbb{R}^n qui contienne E .

SI NOUS FAISONS DANSER LES RACINES ?

RÉSUMÉ. Cet article tente de rendre un modeste hommage au géomètre Bill Thurston, disparu le 21 août 2012. Nous allons présenter quelques-unes de ses observations (visuelles bien entendu !) sur un théorème de Gauss (en 1836) et Lucas (en 1874). L'article s'adresse aux lecteurs ayant déjà une certaine connaissance sur les notions de fonctions, dérivées, polynômes et nombres complexes.

1. INTRODUCTION

La dérivée d'un polynôme est encore un polynôme. Par exemple pour $P(x) = x^4 - 7x^2 + 3$, on trouve $P'(x) = 4x^3 - 14x$.

Comment cela, mon polynôme a des racines ? Les racines d'un polynôme P , ce sont les nombres complexes z solutions de l'équation $P(z) = 0$. Voici quelques exemples : le polynôme $z^2 - 1$ a deux racines : 1 et -1 . Le polynôme $z^2 + 1$ a deux racines : i et $-i$. Le polynôme z^3 n'a qu'une racine : 0.

Factorisation totale. Il y a un théorème très utile, appelé LE théorème fondamental de l'algèbre (et parfois théorème de d'Alembert-Gauss), qui dit qu'un polynôme, qu'il soit à coefficients réels ou complexes, a toujours une racine complexe. Une conséquence¹ est qu'un polynôme de degré m se factorise ainsi :

$$P(z) = A(z - a_1) \cdots (z - a_m)$$

où A et a_1, \dots, a_m sont des nombres complexes. Il possède donc m racines, certaines pouvant se répéter comme dans $P(z) = (z - 1)(z - 1)(z + 2)$. Une racine qui se répète est appelée **racine multiple**.

Si P est de degré m , alors P' est de degré $m - 1$, donc il possède $m - 1$ racines, qui peuvent très bien se répéter.

Y a-t-il une relation entre les racines complexes de P et celles de P' ? Si w est une racine multiple de P , alors c'est une racine de P' . Si le degré de P est égal à deux, alors la racine de P' est le milieu du segment reliant les deux racines de P (et si P a une racine double, c'est aussi la racine de P'). Si P est de degré 3, il y a également une caractérisation géométrique des racines de P' , nettement plus élaborée, due à Marden. Dans le cas général, il n'y a pas de réponse simple, mais on a le joli théorème suivant :

Théorème 1.1 (Gauß-Lucas, version classique). *Pour tout polynôme P (de degré un ou plus), l'enveloppe convexe des racines de P contient les racines de P' .*

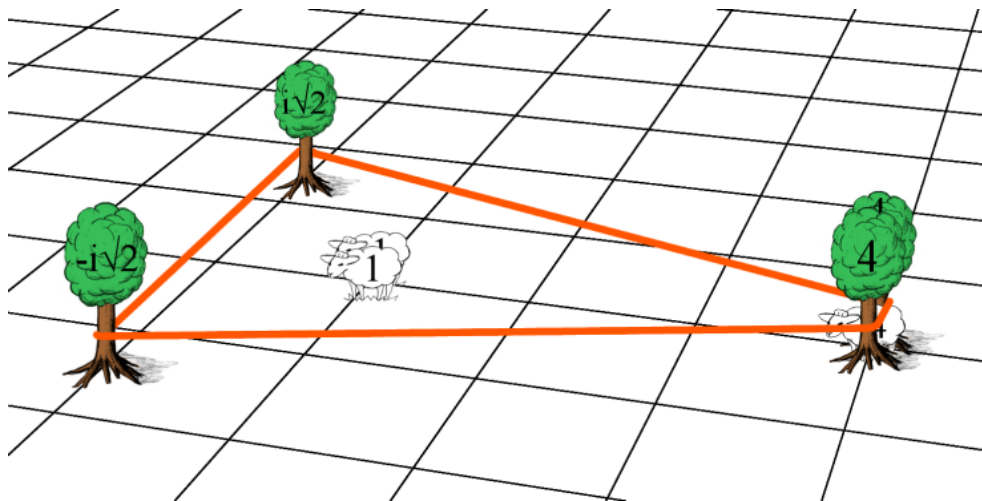
1. Ce n'est pas une conséquence immédiate : il faut utiliser un autre théorème, qui dit que si a est une racine de P , alors $P(z) = (z - a)Q(z)$ où Q est un polynôme.

D'après Wikipedia, ce résultat est utilisé de manière implicite en 1836 par Carl Friedrich Gauß et prouvé en 1874 par Félix Lucas.

Qu'est-ce qu'une enveloppe convexe ? On peut imaginer un terrain avec un certain nombre d'arbres, qu'on veut entourer par un ruban le plus court possible. Le terrain entouré est l'enveloppe convexe de ces arbres. Certains arbres touchent le bord. D'autres (peut-être) sont à l'intérieur du terrain. Ce terrain est en particulier convexe, au sens où il contient le chemin droit reliant n'importe quel couple de ses points. L'enveloppe convexe est un polygône et inclut sa frontière et ses sommets.

Il existe au moins deux autres définitions équivalentes de l'enveloppe convexe d'une collection finie de points : d'une part c'est l'intersection de tous les demi-plans contenant tous les points ; d'autre part c'est l'ensemble des barycentres des points à coefficients positifs ou nuls.

Nous vous avons mijoté un exemple particulier : $P(z) = (z^2 + 2)(z - 4)^2$. Il se factorise ainsi : $P(z) = (z + i\sqrt{2})(z - i\sqrt{2})(z - 4)(z - 4)$ et se développe ainsi : $P(z) = z^4 - 8z^3 + 18z^2 - 16z + 32$. Sa dérivée est $P'(z) = 4z^3 - 24z^2 + 36z - 16$ se factorise ainsi : $P'(z) = 4(z - 1)(z - 1)(z - 4)$. L'enveloppe convexe des racines de P est le triangle de sommets $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$ et 4 et les racines de P' sont 1, 1 et 4, qui sont bien dans l'enveloppe convexe, la dernière étant pile sur un sommet. Dans l'image ci-dessous, nous avons figuré les racines de P comme des arbres et fait appel à des moutons pour celles de P' . Le bord de l'enveloppe convexe correspond à la clôture orange (l'épaisseur des arbres nous a obligés à la décaler légèrement).



2. UNE PREUVE CLASSIQUE DU THÉORÈME DE GAUSS-LUCAS

Si on dérive $P(z) = A(z - a_1) \cdots (z - a_m)$, on trouve que P' est la somme pour j allant de 1 à m des produits $A(z - a_1) \cdots (z - a_m)$ dont on a retiré le facteur

$(z - a_j) :$

$$P'(z) = \sum_{j=1}^m \frac{P(z)}{z - a_j}.$$

Autrement dit

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{z - a_j}.$$

À partir de là il y a plusieurs manières de procéder. Celle que nous présentons a une saveur géométrique et un rapport avec la suite.

Rappelons la méthode pour calculer l'inverse d'un nombre complexe z : si $z = x + iy$, alors son module $|z|$ est $\sqrt{x^2 + y^2}$ et son conjugué \bar{z} est $x - iy$. On a la relation $z\bar{z} = |z|^2$, ou encore, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ si z est non nul.

L'équation citée plus haut se traduit alors ainsi :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^m \frac{\overline{z - a_j}}{|z - a_j|^2}.$$

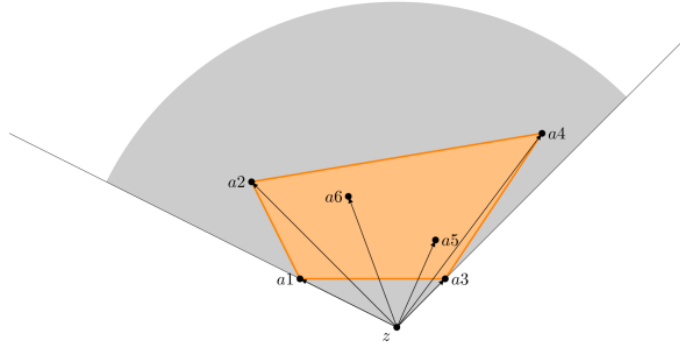
Pour des raisons pratiques, on passe au conjugué dans l'équation plus haut puis on multiplie par -1. On obtient :

$$-\frac{\overline{P'(z)}}{P(z)} = \sum_{j=1}^m \frac{a_j - z}{|z - a_j|^2}.$$

Si z est une racine de P' et pas de P alors $P'(z)/P(z) = 0$ donc on obtient

$$\sum_{j=1}^m \frac{a_j - z}{|z - a_j|^2} = 0.$$

Comme les $1/|z - a_k|^2$ sont des nombres réels positifs, chaque terme de cette somme est un vecteur qui pointe dans la direction de z vers l'un des a_j . Si z était en dehors de l'enveloppe convexe, tous ces vecteurs seraient non nuls et pointeraient dans un même cône, comme sur l'image ci-dessous. Leur somme ne pourrait pas être nulle, ce qui contredirait l'équation. C'est donc que la racine z de P' est dans l'enveloppe convexe des racines a_j de P .



Une variante et un exercice De l'équation précédente, on déduit :

$$\sum_{j=1}^m \frac{a_j}{|z - a_j|^2} = \sum_{j=1}^m \frac{z}{|z - a_j|^2} = z \sum_{j=1}^m \frac{1}{|z - a_j|^2}.$$

En posant $b_j = 1/|z - a_j|^2$, on remarque qu'on a écrit

$$z = \frac{1}{\sum_j b_j} \sum_{j=1}^m b_j a_j$$

ou encore que z est un boarycentre à coefficients positifs des a_j . Cela conclut la démonstration puisqu'un barycentre à coefficients positifs est toujours dans l'enveloppe convexe.

Si on regarde la preuve de près, elle indique également si une racine de P' peut être au bord de l'enveloppe convexe des a_j . Attention, il y a deux cas à considérer. Pouvez-vous trouver l'énoncé et le démontrer ?

3. ASTUCE OU RAISON ?

L'astuce de calcul consistant à diviser par P pourra apparaître, selon la personne, comme une étrangeté ou une évidence. Certains, quand ils voient une preuve élémentaire mais basée sur une astuce la jugent insatisfaisante : à quoi bon démontrer sans expliquer ? Le problème c'est que la notion même d'expliquer est très subjective. Untel qui aime les manipulations algébriques la trouvera très ludique. Tel autre tentera d'en donner une version géométrique, éliminant les calculs au maximum. Nous présentons en fin d'article la preuve de Bill Thurston, maître en la matière.

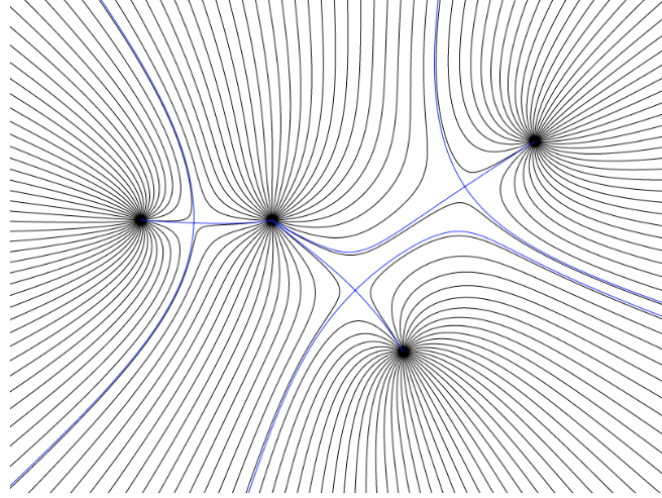
Ci-dessous nous donnons une interprétation géométrique du nombre complexe $-P'(z)/P(z)$ apparaissant dans la preuve précédente. Nous allons considérer notre polynôme P sous un angle différent, c'est-à-dire comme une application ou une transformation du plan complexe. Pour cela imaginons un premier plan complexe (le plan de départ) comme une feuille de papier calque élastique, puis un deuxième plan complexe (le plan d'arrivée) comme une feuille de papier habituelle. à chaque nombre complexe z dans le plan de départ, on associe le nombre complexe $P(z)$ dans le plan d'arrivée. Le premier est appelé antécédent du second et ce dernier image du premier. On dit aussi que P "envoie" z sur $P(z)$.

On peut donc imaginer que P prend le premier plan et tente de le transformer pour couvrir le deuxième plan, de sorte que chaque point z se trouve pile au-dessus du point $P(z)$ ².

Imaginons un motif dans le plan d'arrivée constitué de demi-droites issues de l'origine, que nous appelons des rayons droits. Imprimons ce motif sur le plan élastique de départ déformé par P . Puis décalquons. Cela donne une figure sur le plan de départ, indiquant les antécédents des rayons droits. L'exemple ci-dessous illustre le cas d'un certain polynôme de degré 4. Nous obtenons des courbes et quand elles sont parcourues par z alors $P(z)$ se déplace le long d'un rayon droit.

2. Il se trouve que pour recouvrir le plan d'arrivée comme ce que fait le polynôme P on doit aussi faire appel aux ciseaux et colles, comme pour recouvrir les coins d'un livre.

Nous les appelons courbes radiales. Notons qu'un nombre fini d'entre elles se brisent, précisément aux racines de P' . Elles sont figurées en bleu sur le dessin. Les autres plongent vers l'une des 4 racines.



Lemme 3.1 (de la courbe radiale). *Le vecteur $-\overline{P'(z)}/P(z)$, basé en z , est tangent à la courbe radiale passant par z , et orienté dans le sens où $P(z)$ se rapproche de 0.*

Démonstration. Un petit déplacement dz de z induit un déplacement de $P(z)$ d'environ $P'(z) \cdot dz$. Le vecteur $-P(z)$ est tangent au rayon droit passant par $P(z)$ et pointe vers 0. Si z se déplace sur une courbe radiale de manière à ce que $P(z)$ se rapproche de 0, alors $P'(z) \cdot dz$ pointe dans la même direction que $-P(z)$. Donc dz pointe dans la même direction que $-P(z)/P'(z)$, donc dans la même direction que $-\overline{P'(z)}/P(z)$ en se rappelant que pour tout nombre complexe w non nul, les vecteurs $1/\overline{w}$ et w pointent dans la même direction. \square

Variante. Si vous connaissez le logarithme complexe, vous aurez reconnu que P'/P est la dérivée de $\log(P)$. Les courbes radiales pour P correspondent aux horizontales pour $\log(P)$. Donc si z se déplace d'une petite quantité dz sur une courbe radiale de manière à ce que $P(z)$ se rapproche de 0, la quantité $dz \cdot P'(z)/P(z)$ devrait être un nombre réel négatif, sous la forme $-r$ par exemple. Du coup, le déplacement dz est sous la forme $-P(z)/P'(z)$. Ce dernier pointe dans la même direction que $-P(z)/P'(z)$, qui est la même que $-\overline{P'(z)}/P(z)$. \square

Gauß-Lucas et les courbes radiales.

On peut choisir un sens de parcours des demi-droites issues de 0 : celui se dirigeant vers 0. Cela induit un sens de parcours des courbes radiales : celui pour lequel $P(z)$ se dirige vers 0. Considérons maintenant une courbe radiale, un point z dessus et la droite tangente en z à la courbe. On appellera demi-tangente la moitié de cette droite, démarrant en z et dirigeant dans le sens de parcours de la courbe.

La preuve du théorème de Gauß-Lucas donne alors un résultat intéressant :

Théorème 3.2 (Gauß-Lucas, version radiale). *Soit P un polynôme complexe non-constant. Alors les demi-tangentes aux courbes radiales rencontrent toutes l'enveloppe convexe des racines de P .*

Vous remarquerez dans cet énoncé une petite manie des mathématiciens. En effet si z est dans l'enveloppe convexe, il est évident que la tangente en z passe dans l'enveloppe, puisqu'elle passe par z ! L'énoncé est donc complètement inintéressant dans ce cas, et on aurait donc pu supposer dès le départ z en dehors... Mais on a trouvé plus élégant de faire l'économie de cette hypothèse.

4. UN DEMI-PLAN SUFFIT POUR TOUT RECOUVRIRE

Nous avons jusqu'ici réussi à visualiser à la fois l'énoncé et la preuve du théorème de Gauss-Lucas. Que peut-on dire de plus ?

En fait nous ne sommes qu'à la moitié de notre histoire, ce théorème nous cache encore des facettes bien fascinantes. Par exemple il peut s'énoncer sans même mentionner les racines du polynôme en question. Est-ce que vous nous croyez ?

Notons encore P un polynôme complexe non-constant. Le théorème fondamental de l'algèbre dit que P admet au moins une racine, ou encore, de notre point de vue géométrique, le point 0 admet au moins un antécédent par P .

Soit v un nombre complexe quelconque. Vous remarquerez qu'une solution de l'équation $P(z) = v$ est aussi une solution de l'équation $P(z) - v = 0$, ou encore une racine du nouveau polynôme $P(z) - v$. D'autre part $P(z) = v$ s'interprète géométriquement comme z étant un antécédent de v par P .

En appliquant le théorème fondamental de l'algèbre à $P(z) - v$ pour tout v parcourant le plan complexe, on peut conclure que tout point v admet au moins un antécédent par P . Autrement dit, P arrive à recouvrir tout le plan d'arrivée avec la feuille calque du plan de départ. On dit alors que P est surjectif sur le plan du départ.

L'air de rien, le théorème de Gauss-Lucas indique une économie sur la région suffisante à recouvrir le plan d'arrivée tout entier :

Théorème 4.1 (Gauß-Lucas, version surjective). *Un polynôme non-constant P est surjectif sur tout demi-plan (frontière comprise) qui rencontre des racines du polynôme dérivé P' .*

Démonstration. On procède par absurde à l'aide de la version classique. Soit F un demi-plan rencontrant au moins une racine (disons c) de la dérivée P' tel que son image par P ne couvre pas tout le plan d'arrivée. Il manque par exemple un point v . Les racines du polynôme $Q(z) = P(z) - v$ sont donc toutes en dehors de F . Leur enveloppe convexe est donc disjointe de F . Or d'après la version classique du théorème de Gauss-Lucas (appliquée cette fois-ci au polynôme Q), le point c qui est aussi une racine de la dérivée Q' , se trouverait dans cette enveloppe, donc pas dans F . On obtient une contradiction. \square

On peut aussi redémontrer la version classique à partir de la version surjective (on dit alors que ces deux énoncés sont équivalents). Le détail est laissé au lecteur comme un petit exercice.

Vous avez bien vu qu'il n'est plus question de parler des racines de P !

5. UNE RÉGION ENCORE PLUS ÉCONOMIQUE POUR COUVRIR LE PLAN ?

Ainsi, si l'on veut couvrir le plan d'arrivée tout entier avec un demi-plan contenant le moins de points possible, il faut prendre un demi-plan qui "touche" tout juste l'enveloppe convexe des racines du polynôme dérivé P' .

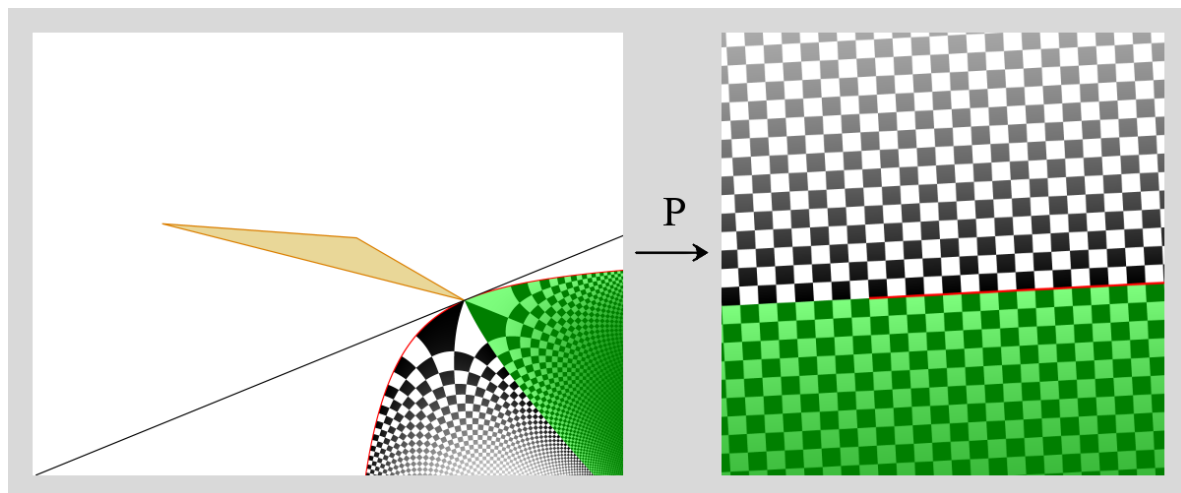
Pour être encore plus économe, il serait intéressant de trouver une région D en un seul morceau (ou bien une région connexe comme disent les mathématiciens) sur laquelle l'image de P couvre chaque point du plan d'arrivée une et une seule fois. On dit alors que P est bijectif sur D . Pour être plus précis, on voudrait que D comprenne la région, appelée intérieur, délimitée par des morceaux de courbes qui forment ce qu'on appelle sa frontière, ainsi qu'une partie de ces courbes (mais pas tout !).

Le résultat suivant, qui est plus puissant que le théorème de Gauß-Lucas classique, nous a été communiqué par Bill Thurston en janvier 2011. Nous ne l'avons jamais vu ailleurs :

Théorème 5.1 (Gauß-Lucas-Thurston, version bijective). *Soit P un polynôme non-constant. Soit F un demi-plan posé sur l'enveloppe convexe des racines du polynôme dérivé P' et extérieur à ces racines. Il y a sur la droite délimitant F une ou plusieurs racines de P' . Soit c l'une d'entre elles. Alors dans F on peut trouver une région connexe DF sur laquelle P est bijectif, et dont l'intérieur est envoyé par P sur un plan privé d'une demi-droite issue de $P(c)$.*

Il n'est pas si difficile de trouver des régions bijectives, et on a un large choix sur la forme de l'image par P de leur intérieur. L'intérêt du théorème est qu'il situe certaines de ces régions, d'image un plan moins une demi-droite, dans les demi-plans F appuyés sur l'enveloppe des racines de P' . Sa preuve est également intéressante, en ce qu'elle consiste à appliquer le théorème de Gauß-Lucas non pas à P , mais à P' , et la version radiale qui plus est.

L'image suivante essaye d'illustrer le théorème. Le polynôme a degré 4. Les trois racines de P' sont les sommets du triangle orange. Nous ne savons pas où sont les racines de P et, pour une fois, on s'en moque ! Le demi-plan F est délimité par la droite noire et s'appuie sur un des sommets, sans toutefois contenir le triangle. La région D est la zone contenue dans F et peinte avec les damiers noirs et verts. Sa frontière est la courbe rouge. Le polynôme P envoie la région D sur l'image de droite, l'intérieur est envoyé sur le plan privé de la demi-droite rouge. On a pris soin, pour z dans D ou sa frontière, de peindre z avec la même couleur que $P(z)$. On peut s'imaginer que P prend la région D , la déforme pour recoudre la courbe rouge sur elle-même à partir du point de contact avec le triangle, de manière à obtenir le plan d'arrivée.



6. ESQUISSE DE PREUVE DU THÉORÈME 5.1

Voici une autre illustration de la même situation. L'enveloppe convexe des racines du polynôme dérivé P' est représentée par un triangle blanc. On considère le même demi-plan F en bas à droite de la droite noire.

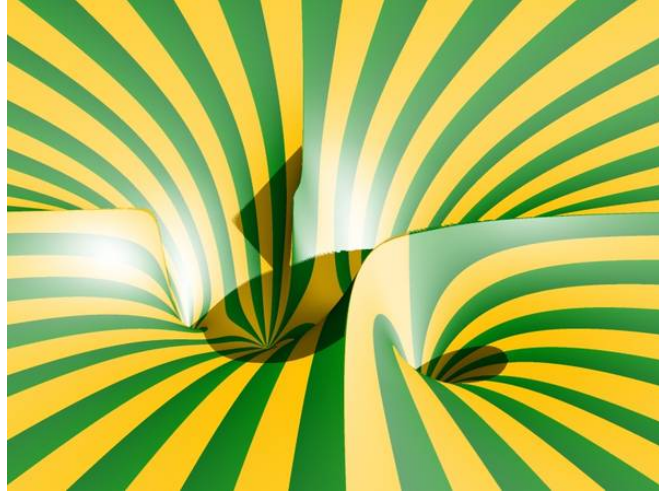


Pour mettre en lumière la preuve, on a illustré cette fois-ci des courbes radiales de $P(z) - v$ pour un certain choix de v . Ces courbes ne sont rien d'autre que les antécédents par P des rayons droits du plan d'arrivée et coulant vers v . Dans F on peut remarquer la présence d'un puits de ces courbes, c'est-à-dire un antécédent de v . Appelons-le p .

La valeur v a été choisie de sorte qu'une des courbes radiales de p 'bute' sur le sommet blanc c perpendiculairement à la droite noire, puis bifurque sur deux courbes tangentes à cette droite. On trouve de tels v sur une certaine demi-droite issue de $P(c)$.

On peut constater sur l'image, et c'est là qu'il faut travailler pour le montrer, que les deux courbes brisées restent dans F sans traverser la barrière noire. Une fois ce fait établi, toutes les autres courbes radiales de p seront bloquées par ces deux-là et resteront dans F . On pourra alors prendre D comme la région dans F délimitée par ces deux courbes (en ne considérant qu'une des deux courbes comme faisant partie de notre région). Le fait que ces courbes radiales sont complètes, c'est-à-dire que P envoie bien chacune sur la demi-droite issue de v toute entière, vient essentiellement du fait qu'elles ne rencontrent aucune racine de P' (pour les plus curieux, signalons qu'on applique le théorème d'inversion locale et le fait que $P(z)$ est grand quand z est grand). Il apparaîtra alors dans D une copie déformée mais conforme du plan d'arrivée muni des rayons radiaux coulant vers v .

Pour le plaisir, voici une mise en relief de notre région D . Elle n'est pas nécessaire à la compréhension de la suite³.



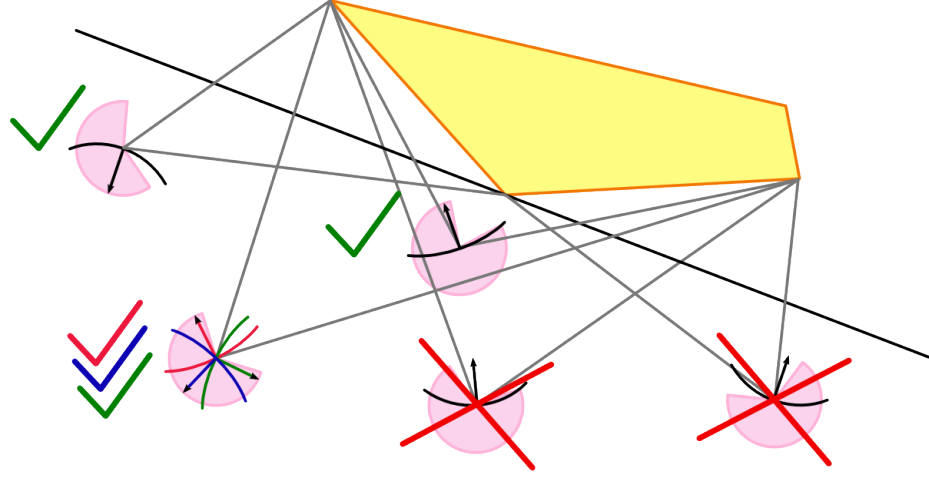
Esquissons à présent une preuve que ces deux courbes brisées restent dans F , en les suivant à rebours (vers l'infini). On va étudier dans quelle direction peuvent s'incurver les courbes radiales. Cependant, on va appliquer la version radiale du théorème de Gauß-Lucas non pas à P , mais à P' .

Lemme 6.1. *Appelons n le vecteur normal en un point z à une courbe radiale, et pointant dans le sens vers où s'incurve la courbe. Alors n fait un angle d'au moins $\pi/2$ avec $-\overline{P''(z)}/P'(z)$.*

Avant de démontrer ce lemme, voyons sur la figure suivante comment on peut l'utiliser pour en déduire le théorème. Le polygone jaune est l'enveloppe convexe des racines de P' . On a dessiné des bouts de courbes et les normales correspondantes. Certains sont compatibles avec le lemme, d'autres pas. On a coché les premiers et biffé les seconds. La règle est la suivante : le vecteur n doit faire plus de $\pi/2$ avec le vecteur $-\overline{P''(z)}/P'(z)$, qui lui-même doit appartenir au cône issu

3. Les “piques” hors cette région sont artificiels. Pour les experts, signalons que hauteur des reliefs a été choisie suivant une « représentation conforme » de cette région vers le disque unité

de z et contenant les racines. Pour 5 points z différents, on a représenté en rose les directions des vecteurs n autorisés par le lemme.



Parcourons maintenant une courbe radiale. Si on est arrivé en un point z où la courbe s'éloigne de la droite noire, alors en continuant de la parcourir dans le même sens, elle ne pourra plus jamais s'en rapprocher : sinon, elle devrait être à un moment parallèle à la droite noire, mais s'incurver vers elle. Le vecteur n serait perpendiculaire à la droite noire et orienté dans sa direction. Il ferait alors moins de $\pi/2$ avec tous les vecteurs du cône, car ces derniers pointent tous vers l'enveloppe : contradiction. La preuve que les deux courbes radiales issues de c commencent dès le début à s'incurver vers F est quasiment la même. Ainsi les deux courbes en lesquelles se brise le rayon issu de v sont intégralement incluses dans F . Nous avons vu plus haut que cela suffit à prouver le théorème.

Notez qu'on n'a pas démontré que D est convexe, d'ailleurs ce n'est pas toujours le cas.

Il nous reste à démontrer le lemme. Il y a une version de la preuve utilisant le calcul différentiel, mais nous préférons présenter la vision géométrique qu'en avait Thurston. Attention, celle-ci requiert des notions de géométrie Riemannienne (pas étudiées à l'université avant le M1 ou M2 dans les cursus de mathématiques fondamentales).

Démonstration du Lemme 6.1. L'idée est de considérer le plan de départ avec une autre métrique, en l'occurrence celle 'calquée' par P de la métrique usuelle du plan d'arrivée. Ainsi un vecteur de longueur unité habituelle issu d'un point z a pour longueur $|P'(z)|$ à présent. Du coup les courbes radiales de $P(z) - v$ deviennent des géodésiques pour cette métrique. En général une géodésique d'un point A à un point B n'est pas une ligne droite quand la métrique est variable, même quand A et B sont proches : elle a tendance à faire un détour par les endroits où le coefficient de la métrique est petit, car c'est plus économique, c'est-à-dire dans notre cas vers la partie où le module de P' devient plus petit. Thurston disait que c'est comme à la plage : pour aller plus vite d'un endroit à

un autre, il vaut mieux faire un détour vers le bord de la mer et marcher le plus longtemps possible sur du sable mouillé et dur. Ce détour fait que notre parcours s'incurve dans le sens opposé à la mer. Donc le vecteur normal n de notre lemme doit orienter dans une direction où le module de P' devient plus grand.

Et la version radiale du théorème de Gauss-Lucas, appliquée cette fois-ci au polynôme dérivé P' , montre que le module de P' diminue dans n'importe quelle direction faisant moins de $\pi/2$ avec $-\overline{P''(z)}/P'(z)$. Ainsi notre vecteur n doit éviter toutes ces directions. \square

7. UNE PREUVE SANS CALCUL ? ET APRÈS ?

Pour terminer notre tour de visite du théorème de Gauss-Lucas, nous vous indiquons une autre preuve de la version classique de ce théorème. Elle nous a été proposée par Bill Thurston. Par rapport à la preuve présentée en début d'article, elle élimine les deux lignes de calcul de $P'(z)/P(z)$. Elle est donc encore plus géométrique ! Par contre, elle n'offre pas le raffinement de bijectivité. Comme certaines notions nécessitent une connaissance du cours de Calcul Différentiel en L3, nous la présenterons sous forme d'une série d'exercices sans fournir tous les détails. Nous ne présenterons pas les illustrations non plus.

Soit z un point hors l'enveloppe convexe des racines d'un polynôme P .

- Pour chaque racine a_j de P , on trace la droite passant par z perpendiculaire au segment $[z, a_j]$. La fonction distance $z \mapsto |z - a_j|$ a une dérivée directionnelle strictement positive dans n'importe quelle direction pointant vers le côté opposé à a_j de cette droite.
- Comme z admet un cône visuel vers les racines a_j , il existe une direction dans laquelle la dérivée directionnelle de $z \mapsto |z - a_j|$ est strictement positive pour toutes les racines a_j .
- Ceci implique que dans cette direction, la dérivée directionnelle de $z \mapsto |P(z)|$ est aussi strictement positive, car $|P(z)|$ est le produit des $|z - a_j|$.
- $P'(z)$ est donc non nul.

Ceci démontre le théorème de Gauss-Lucas.

Et après ?

Nous sommes enfin arrivés à la fin de notre histoire. Mais la fin d'une histoire est peut-être le début d'une autre, n'est-ce pas ?

Derrière ce théorème ultra classique et innocent, il y a encore de multiples questions dont on ne connaît pas de réponses. Par exemple, malgré beaucoup de résultats partiels, on ne sait toujours pas bien localiser les racines de P' par rapport à celles de P . Après tout l'enveloppe convexe des racines pourrait être un trop grand terrain pour cacher nos trésors...

Un autre problème intéressant est d'étudier l'intersection K , sur tout v possible, de l'enveloppe convexe des racines de $P(z) - v$. Elle doit contenir toutes les racines de P' , et par conséquent leur enveloppe convexe C . On aurait pu s'attendre à ce que K se réduise à C . Mais des expériences numériques suivies

des arguments rigoureux montrent que ce n'est souvent pas le cas ! Pour plus de détail, le lecteur est invité à consulter une discussion sur Mathoverflow⁴.

Ce théorème est aussi lié à une conjecture d'Eduardo Casas-Alvero, formulée en 2001 :

Conjecture 1 (Casas-Alvero). Soit P un polynôme de degré au moins 1 ayant une racine commune avec chacune de ses dérivées successives. Alors, toutes les racines de P se confondent en un seul point.

4. Attention aux notations, le polynôme $P(z)$ là-bas pourrait désigner notre $P'(z)$ ici