EPREUVE ORALE DE MATHEMATIQUES - Filière MP

Pour conclure, nous proposons ci-dessous un exemple d'exercice posé lors de la session 2025, accompagné d'éléments de correction et de commentaires.

## Énoncé

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On définit $f : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par

$$f(M) = \mathrm{Tr}(M - Ae^M).$$

a) La fonction $f$ est-elle majorée ? Est-elle minorée ?

b) Montrer que $f$ atteint son maximum.

c) En quel(s) point(s) $f$ atteint-elle ce maximum ?

## Commentaires

Traiter en entier l'exercice dans le temps imparti est assez difficile, mais résoudre les deux premières questions permet déjà de s'assurer une note tout à fait correcte.

a) Pour commencer, on peut s'intéresser au cas où $n = 1$. On est ainsi amené, étant donné un réel $a > 0$, à étudier la fonction $g(x) = x - ae^x$. Celle-ci tend vers $-\infty$ lorsque $x \to \pm\infty$ donc il existe $u, v \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [u, v]$, on ait $g(x) < g(0)$. De plus, la restriction de $g$ au segment $[u, v]$ étant continue, elle atteint un maximum $c$. Par conséquent $g$ est majorée sur $\mathbb{R}$ par $c$ mais elle n'est pas minorée.

On s'intéresse maintenant au cas général. Montrons que $f$ n'est pas minorée. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale $D$ à coefficients strictement positifs telles que $A = PDP^{-1}$. En effectuant le changement de variables $M = PM'P^{-1}$, on a $f(M) = \mathrm{Tr}(M' - De^{M'})$. Ainsi on se ramène au cas où $A$ est diagonale.

En prenant $M_{1,1} = x$ et $M_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \neq (1, 1)$, on a $f(M) = x - a_{11}e^x - a_{22} - \cdots - a_{nn}$ donc, d'après le cas $n = 1$, la fonction $f$ n'est pas minorée.

Montrons que $f$ est majorée. À ce stade, si le candidat bloque, l'examinateur peut être amené à suggérer de montrer le

*Lemme.* Soit $A$ et $M$ deux matrices symétriques telles que $A$ soit positive. Alors $\mathrm{Tr}(Ae^M) \geqslant 0$.

Montrons le lemme. On a $\mathrm{Tr}(Ae^M) = \mathrm{Tr}(BAB)$ où $B = e^{M/2}$. La matrice $BAB$ est clairement symétrique, et elle est aussi positive puisque pour tout vecteur non nul $X \in \mathbb{R}^n$ on a $X^T(BAB)X = (BX)^T A(BX) \geqslant 0$. Par conséquent ses valeurs propres sont toutes positives ou nulles, et sa trace est bien positive ou nulle comme annoncé.

Revenons à l'exercice. Soit $a$ la plus petite valeur propre de $A$. Notons comme ci-dessus $g(x) = x - ae^x$, et notons $c = \sup(g)$. On a

$$f(M) = \mathrm{Tr}(M - ae^M) - \mathrm{Tr}((A - aI)e^M).$$

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $M$. En diagonalisant $M$, on voit que le premier terme est égal à $\sum_{i=1}^n g(\lambda_i)$.

D'autre part, le terme $\mathrm{Tr}((A-aI)e^M)$ est positif d'après le lemme (la matrice $A-aI$ étant positive comme on le voit par diagonalisation). Par conséquent, $f(M) \leqslant \sum_{i=1}^n g(\lambda_i) \leqslant nc$.

b) Observons d'abord que $f$ est continue : l'exponentielle est continue car c'est la somme d'une série qui converge normalement sur tout compact. Comme la somme et le produit matriciels sont continus, ainsi que la trace, la fonction $f$ est continue sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Nous allons montrer qu'il existe un compact $K$ tel que $f(M) < f(0)$ pour tout $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \setminus K$. Ceci permettra de conclure puisque la restriction de $f$ à $K$ atteint un maximum d'après le théorème des bornes atteintes, et alors il s'agit du maximum de $f$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ tout entier.

Nous avons vu dans la démonstration de la question a) que $f(M) \leqslant \sum_{i=1}^n g(\lambda_i)$. Par conséquent pour tout $j$ on a $f(M) \leqslant (n-1)c + g(\lambda_j)$.

Soit $\alpha < \beta$ des réels tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta]$, $g(x) < f(0) - (n-1)c$. Posons

$$K = \{M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Sp}(M) \subset [\alpha, \beta]\}.$$

D'après ce qui précède, l'inégalité $f(M) < f(0)$ est bien vérifiée pour tout $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \setminus K$. Il reste à montrer que $K$ est compact.

Le fait que $\mathrm{Sp}(M) \subset [\alpha, \beta]$ équivaut à ce que $M - \alpha I$ et $\beta I - M$ sont positives, donc

$$K = \{M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n,\ \alpha||X||^2 \leqslant X^T M X \leqslant \beta||X||^2\}$$

(où $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne). Par conséquent

$$K = \bigcap_{X \in \mathbb{R}^n, ||X||=1} \varphi_X^{-1}([\alpha, \beta])$$

où $\varphi_X(M) = X^T M X$. Comme pour tout $X$, $\varphi_X$ est continue de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, et comme $[\alpha, \beta]$ est fermé, ceci entraîne que $K$ est fermé.

De plus, en munissant $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur $||M|| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n, ||X||=1} ||MX||$, on voit que $K$ est inclus dans la boule de rayon $\max(|\alpha|, |\beta|)$, donc il est borné, ce qui achève de montrer sa compacité.

c) Soit $M$ un point où $f$ atteint son maximum. Supposons d'abord que $A = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ et $M = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont diagonales. Si $H = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ est diagonale alors $f(M + H) - f(M) = \sum \mu_i - a_{ii} e^{\lambda_i}(e^{\mu_i} - 1)$. Cette expression est maximale lorsque $(\mu_1, \dots, \mu_n) = (0, \dots, 0)$ donc, en dérivant en 0 par rapport à $\mu_i$, il vient $1 = a_{ii} e^{\lambda_i}$, c'est-à-dire $\lambda_i = -\ln(a_{ii})$. Autrement dit, $M$ est l'unique l'endomorphisme qui coindice avec $-\ln(\lambda)\mathrm{Id}$ sur tout espace propre $\ker(A - \lambda \mathrm{Id})$.

Ce résultat reste vrai si $A$ et $M$ commutent car dans ce cas $A$ et $M$ sont diagonalisables dans une même base orthonormée (cela se montre en observant que les espaces propres de $A$ sont stables par $M$).

Pour conclure l'exercice, il reste à montrer $M$ commute nécessairement avec $A$. Supposons le contraire. Traitons d'abord le cas $n = 2$. Quitte à conjuguer par une matrice orthogonale, on se ramène au cas où $M = \mathrm{diag}(a, b)$ avec $a \neq b$. Soit $H = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculons explicitement l'exponentielle de $M + H$. Pour cela, comme $M + H$ est triangulaire supérieure, avec pour valeurs propres $a$ et $b$ ; puisque $a \neq b$, la matrice $M + H$ est diagonalisable. On vérifie (en utilisant la diagonalisabilité) que pour tout polynôme $\varphi$ tel que $\varphi(a) = e^a$ et $\varphi(b) = e^b$, on a $e^{M+H} = \varphi(M + H)$. En prenant $\varphi(x) = e^a + \mu(x - a)$ où $\mu = \frac{e^b - e^a}{b-a}$, il vient $e^{M+H} = \begin{pmatrix} e^a & \mu c \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$. On a ainsi $f(M + H) - f(M) = -a_{21}\mu c$. Par conséquent $a_{21} = 0$ et de même $a_{12} = 0$.

Le cas des matrices $n \times n$ est similaire : on se ramène au cas où $M = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est diagonale. Pour tout couple $(i, j)$ tel que $\lambda_i \neq \lambda_j$, on considère $H = cE_{ij}$ (où $E_{ij}$ est la matrice dont le coefficient $(i, j)$ vaut 1 et tous les autres coefficients sont nuls). Un calcul similaire donne que $a_{ji} = 0$ et de même $a_{ij} = 0$, donc $A$ et $M$ commutent.