

Epreuve de mathématiques, Filière PC

Exemples d'exercices posés :

**Exercice 1 :** 1. Existe-t-il des polynômes  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P''|P$ . Les déterminer.  
2. Montrer que pour un tel  $P$  de degré  $n$ , soit  $P$  n'a qu'une racine, soit il en a  $n$  distinctes qui sont alignées.

**Exercice 2 :** Démontrer qu'il existe un développement en série entière de

$$F(x) = (1-2x-x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Calculer les coefficients  $a_n$ . Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

Pour l'exercice 1, la première question peut se traiter à la main en écrivant un système linéaire, soit en étudiant une application linéaire définie sur un espace vectoriel de polynômes approprié. La seconde question est plus délicate. Le candidat était incité à traiter un cas particulier et à introduire un produit scalaire accessoire (et montrer que c'est bien un produit scalaire).

L'exercice 2 est plus abordable sans aide. On montre que les candidats aux coefficients de la série entière satisfont une récurrence linéaire d'ordre 2. On attendait des candidats qu'ils soient très précis sur les différences entre condition nécessaire / condition suffisante et à ce qu'ils n'oublient pas de vérifier, une fois les  $a_n$  identifiés, qu'il y a bien égalité  $(1-2x-x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .